TEMA 5: INTRODUCCIÓ ALS CIRCUITS DINÀMICS

5.1. INTRODUCCIÓ

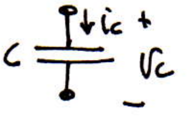
Fins ara hem vist només circuits resistius. Ara començarem a veure circuits dinàmics, això vol dir que tenen memòria.
Aquests circuits, a part de resistències, tindran altres elements, com els condensadors i les bobines.
Aquests elements recorden valors de tensions i corrents passats. D'aquesta manera, la sortida, no només depèn de l'entrada actual, sinó també de les passades.
Veurem que la sortida depèn de la velocitat de variació de les entrades. Això ens permetrà fer integradors i derivadors.

5.2. ELEMENTS DE CIRCUIT DINÀMICS

Estudiarem els dos elements que treballarem, els condensadors i les bobines.

5.2.1. Condensador

El condensador té per símbol:



El simbolitzem així perquè la forma més senzilla de fer un condensador és amb dues plaques paral·leles separades per un dielèctric.

Les lleis de l'electroestàtica ens indiquen que:

$q(t) = C \cdot v_c(t)$ on C és la capacitat del condensador.

La capacitat es mesura en Faradis (F). Normalment nosaltres utilitzarem condensadors de pF, nF o μF.
La capacitat depèn bàsicament de la construcció del condensador. (dimensions de les plaques, separació entre elles i característiques del dielèctric).

Com que no ens interessa utilitzar la càrrega, sinó la intensitat, que és la velocitat de variació de la càrrega, tindrem:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \text{si } q(t) = C \cdot v_c(t) \Rightarrow \boxed{i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}}$$

Aquest seria el model matemàtic d'un element ideal.
Anem a veure ara quina seria la tensió:

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \Rightarrow dv_c(t) = \frac{1}{C}\, i(t)\, dt$$

Integrem els dos membres:

$$\int_{-\infty}^{t} dv_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt \Rightarrow v_c(t)\Big|_{-\infty}^{t} = v_c(t) - v_c(-\infty)$$

així tindríem:

$$v_c(t) - \cancel{v_c(-\infty)} = \underbrace{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(t)\,dt}_{v_c(0) - \cancel{v_c(-\infty)}} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)\,dt$$

$$\boxed{v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)\,dt}$$

Veiem que té memòria, ja que depèn de la tensió inicial que hi ha al condensador.

No hi poden haver canvis bruscs a la tensió, ja que en aquest cas, la derivada es faria ∞, i per tant, la intensitat, i això no és possible. En canvi, sí que hi poden haver canvis a la intensitat que passa pel condensador. Això només pel condensador. La tensió a l'entrada pot ser qualsevol.

La potència seria:

$$P_c(t) = i_c(t)\cdot v_c(t) = C\cdot v_c(t)\cdot\frac{dv_c(t)}{dt}$$

La potència pot ser positiva o negativa, per tant pot absorbir o entregar energia, ara bé, per entregar-la abans l'hauria d'absorbir, ja que l'energia és positiva, i per tant és un element passiu.

Sabent que: $(f^2)' = 2f\cdot f' \Rightarrow P_c(t) = C\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_c^2(t)\right)$

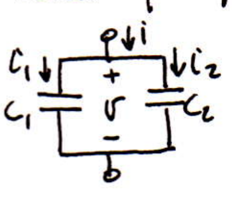
Si $P_c(t) = \frac{dW_c}{dt} \Rightarrow W_c(t) = \frac{C}{2}v_c^2(t)$ → Sempre positiva.

Amb això podem dir sobre el condensador:

- → La tensió al condensador és una funció contínua, no té canvis bruscs.
- → Si la tensió al condensador es manté constant la intensitat és nul·la i es comporta com un c.o.
- → El condensador pot emmagatzemar energia (pot absorbir i després entregar energia).
- → És un element passiu (energia sempre positiva).

<u>Condensadors en paral·lel</u>:

Veiem què passa quan tenim condensadors amb paral·lel.



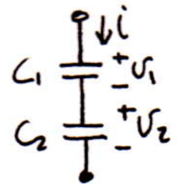
$$i = i_1 + i_2 = C_1\frac{dv(t)}{dt} + C_2\frac{dv(t)}{dt} = (C_1+C_2)\frac{dv(t)}{dt}$$

Per tant: $C = C_1 /\!/ C_2 = C_1 + C_2$

(És com si tinguès la placa més grossa).

Condensadors en sèrie:

Vereu què passa si tenim dos condensadors en sèrie:



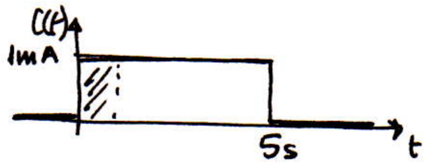
$$v = v_1 + v_2 = v_1(0) + \frac{1}{C_1}\int_0^t i(t)\,dt + v_2(0) + \frac{1}{C_2}\int_0^t i(t)\,dt$$

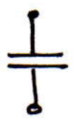
$$v = v_1(0) + v_2(0) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_0^t i(t)\,dt$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Passa el mateix que quan tenim resistències en paral·lel.

Vereu què passa amb la tensió i intensitat per algunes formes d'ona.

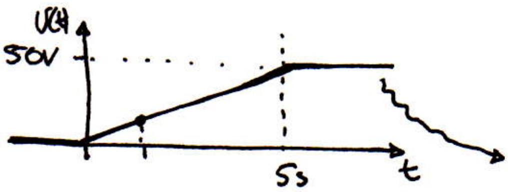


 $C = 100\mu F$

$v(t) = 0 \qquad t<0$

$v(t) = \frac{t \cdot 10^{-3}}{C} = \frac{t \cdot 10^{-3}}{10^{-4}} = 10t \qquad 0<t<5$

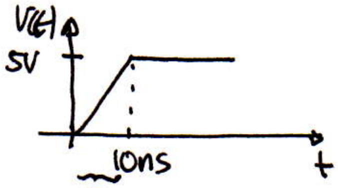
$v(t) = 50\,V \qquad t>5$



Al fer la integral seria com anar buscant l'àrea.

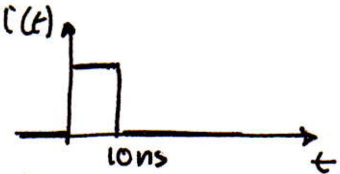
Vereu que té memòria. Així $i=0$, però v recorda l'últim valor.

Si partim de la tensió:



$\frac{5t}{10 \cdot 10^{-9}} = 5 \cdot 10^{8}\, t$

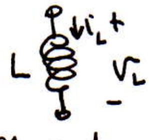
i $C = 10pF$ $\rightarrow$



$i(t) = C\frac{dv}{dt} = 10 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{8} = 50 \cdot 10^{-4} = 5mA.$

5.2.2. Bobina

La bobina és un fil de coure enrotllat al voltant d'un nucli de ferrita. Per això el simbolitzem de la següent manera.



La inductància (L) de la bobina es mesura en Henries. Normalment treballarem amb mH.

El valor de la inductància només depèn de la construcció de la bobina, concretament del quadrat del nombre d'espires.

La tensió a la bobina seria:

$$\boxed{v_L(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt}}$$

Aquest seria el model matemàtic d'un element ideal. Com que el fil de coure té una resistència, un model més real seria posant una resistència en sèrie amb la bobina.

Igual que hem fet amb el condensador, anem a trobar quina seria la intensitat a la bobina.

$$\int_{-\infty}^{t} d i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)\,dt \rightarrow \boxed{i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)\,dt}$$

Per dualitat amb el condensador, aquí serà la $i_L(t)$ que no podrà fer salts brusc, ja que sinó la $v_L(t)$ es faria ∞, i això a la realitat no pot ser.

Seguint els mateixos passos que vam fer amb el condensador, trobaríem la potència i l'energia:

$$P_L = L\cdot i_L(t)\cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad \text{o bé també:} \quad P_L = L\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\, i_L^2(t)\right)$$

$$W_L(t) = \frac{L}{2}\, i_L^2(t)$$

Per tant veiem que passa com el condensador. La bobina és un element passiu ($W_L \geq 0$), però pot entregar energia si l'ha absorvit abans (P_L pot ser positiva o negativa).

La bobina també és un element amb memòria. Mentre que el condensador recorda la tensió anterior, la bobina recorda la intensitat.

Amb això, podem dir sobre la bobina:

→ La intensitat a la bobina és una funció contínua que no pot tenir canvis bruscs.

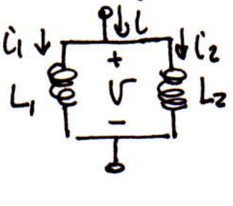
→ Si la intensitat a la bobina es manté constant, la tensió és nul·la i es comporta com un c.c.

→ La bobina pot emmagatzemar energia (pot absorbir i després entregar energia).

→ És un element passiu (energia sempre positiva).

<u>Bobines en paral·lel</u>:

Veiem què passa quan tenim bobines en paral·lel:



$$i = i_1 + i_2 = i_1(0) + \frac{1}{L_1}\int_0^t v(t)\,dt + i_2(0) + \frac{1}{L_2}\int_0^t v(t)\,dt$$

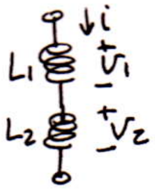
$$i = i_1(0) + i_2(0) + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\int_0^t v(t)\,dt$$

$$L_1 // L_2 \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{L_1 + L_2}{L_1 \cdot L_2} \Rightarrow L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Passa el mateix que quan teníem resistències en paral·lel.

Bobines en sèrie:

Veiem què passa si tenim dues bobines en sèrie:



$$v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1+L_2)\frac{di}{dt}$$

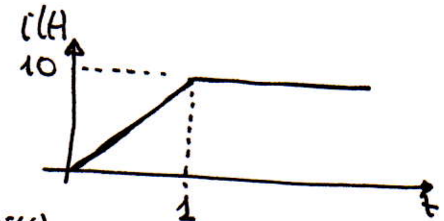
L_1 sèrie $L_2 \Rightarrow L = L_1 + L_2$

També passa com a les resistències.

Veurem més endavant que a l'estar en sèrie es podria produir acoplament i ens apareixeria un nou terme:

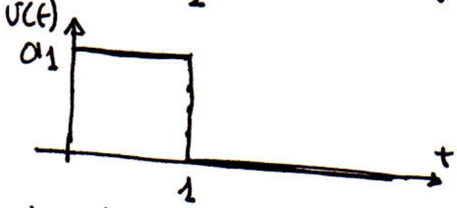
$$L = L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

Si tenim unes formes d'ona com les que hem treballat amb el condensador, ara ens trobarem que el què li passava a la tensió del condensador, ara li passa a la intensitat de la bobina.



$i(t) = 10t \quad 0<t<1$

$i(t) = 10 \quad t>1$



$v(t) = 0'1 \quad 0<t<1$

$v(t) = 0 \quad t>1$

És tracta d'una bobina, ja que la tensió és la derivada de la intensitat. Veiem quin valor té.

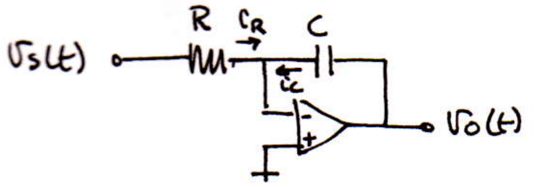
$$v = L\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \begin{cases} 10 & 0<t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$$

$v = L \cdot 10 \rightarrow$ per $0<t<1 \Rightarrow 0'1 = L\cdot 10 \Rightarrow L = 10\,mH$.

5.3. CIRCUITS DE PRIMER ORDRE AMB A.O.

Veurem que si combinem un sol condensador (parlem de primer ordre) o una sola bobina amb circuits amb A.O's, és relativament fàcil d'analitzar i trobem aplicacions interessants. Ja vam veure al tema d'A.O que es podien fer integradors i derivadors. Anem-ho a analitzar ara amb més detall.

5.3.1. Integradors



Fem un KCL:

$i_R + i_C = 0$

$i_R = \frac{v_S}{R}$; $i_C = C\frac{dv_O}{dt}$

Així:

$$\frac{v_S}{R} + C\frac{dv_O}{dt} = 0 \rightarrow dv_O(t) = -\frac{1}{RC}v_S(t)\,dt$$

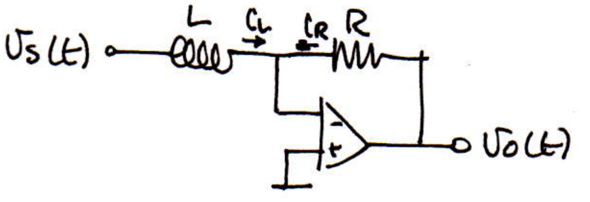
Tenim una equació diferencial fàcil de resoldre, haurem d'integrar els dos membres:

$$\int_{-\infty}^{t} dv_O(t) = -\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} v_S(t)\,dt$$

$$v_O(t) = \underbrace{-\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{0} v_S(t)\,dt}_{\text{serà la tensió inicial al C.}} - \frac{1}{RC}\int_{0}^{t} v_S(t)\,dt \rightarrow \boxed{v_O(t) = v_O(0) - \frac{1}{RC}\int_{0}^{t} v_S(t)\,dt}$$

Veiem que és un integrador, però ens apareix la tensió inicial al condensador.

També podem fer un integrador amb una bobina:

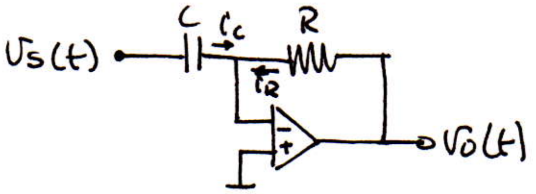


$i_L + i_R = 0$

$i_R = \frac{v_O(t)}{R}$; $i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_S(t)\,dt$

$$\frac{v_O(t)}{R} + i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_S(t)\,dt = 0 \Rightarrow \boxed{v_O(t) = -R\,i_L(0) - \frac{R}{L}\int_0^t v_S(t)\,dt}$$

5.3.2. Derivadors

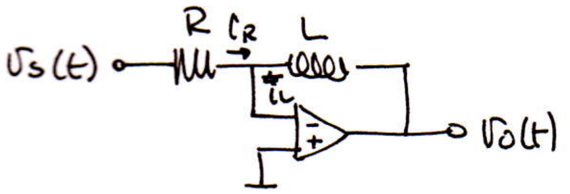


$i_C + i_R = 0$

$i_R = \frac{v_O(t)}{R}$; $i_C = C\frac{dv_S(t)}{dt}$

$$\frac{v_O(t)}{R} + C\frac{dv_S(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{v_O(t) = -RC\frac{dv_S(t)}{dt}}$$

Ara tenim un derivador, fet amb un condensador. Si el volem fer amb una bobina tindrem:



$i_R + i_L = 0$

$i_R = \frac{v_s(t)}{R}$; $i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_o(t)\,dt$

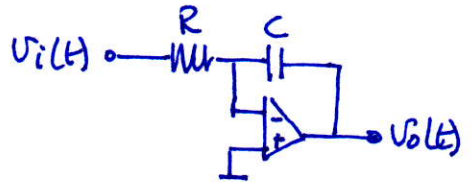
$$\frac{v_s(t)}{R} + i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_o(t)\,dt = 0$$

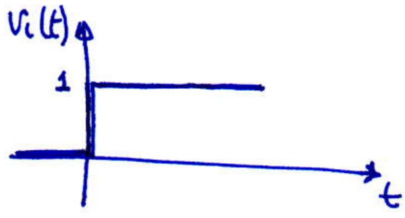
Derivem i aïllem $v_o(t)$:

$$\frac{dv_s(t)}{dt}\frac{1}{R} + \frac{v_o(t)}{L} = 0 \Rightarrow \boxed{v_o(t) = -\frac{L}{R}\frac{dv_s(t)}{dt}}$$

Veiem algun exemple amb circuits similars:

Ex: Trobar la sortida del següent integrador per l'entrada i els valors donats:





Agafem l'entrada graó.

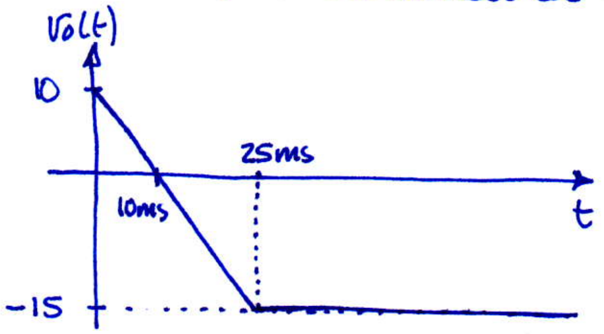
$v_c(0) = 10V$ $R = 1k\Omega$, $C = 1\mu F$

$RC = 10^3 \cdot 10^{-6} = 10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{RC} = 10^3$

La sortida era: $v_o(t) = v_c(0) - \frac{1}{RC}\int_0^t v_i(t)\,dt$

$$v_o(t) = 10 - 1000\int_0^t 1\,dt = 10 - 1000t\Big|_0^t = 10 - 1000t$$

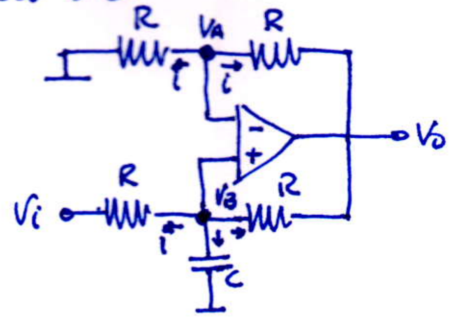
Si suposem que aquest A.O. està alimentat a ±15, recordem que la sortida no podrà ser mai superior a aquests. Aleshores, al dibuixar la sortida tindrem:



A partir de $t = 25$mseg, la sortida es farà massa gran i es saturarà l'AO a $-V_{cc}$. A partir d'aquí ja no tindrem la integral de l'entrada a la sortida.

Veiem ara algun altre exemple amb un circuit amb AO però més complicat.

Ex: Trobar la sortida pel següent circuit. Suposem que treballa en Z.L.



Plantegem KCL's a cada node:

A $\rightarrow G V_A + G(V_A - V_o) = 0 \rightarrow 2GV_A - GV_o = 0$

$V_A = \dfrac{V_o}{2}$

B $\rightarrow G(V_B - V_i) + G(V_B - V_o) + C\dfrac{dV_B}{dt} = 0$

$2GV_B - GV_i - GV_o + C\dfrac{dV_B}{dt} = 0$

Es forma el c.c. virtual, pertant $V_A = V_B$. Com que $V_A = \dfrac{V_o}{2}$, ho posem a l'equació del node B i trobem:

$$\cancel{2G\frac{V_o}{2}} - GV_i - \cancel{GV_o} + \frac{C}{2}\frac{dv_o}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{C}{2}\frac{dv_o}{dt} = GV_i \Rightarrow dv_o = \frac{2}{RC}V_i\,dt$$

Si integrem els dos membres:

$$v_o = \int_{-\infty}^{t}\frac{2}{RC}v_i(t)\,dt = \underbrace{\frac{2}{RC}\int_{-\infty}^{0}v_i(t)\,dt}_{\text{Això serà } v_o(0)} + \frac{2}{RC}\int_{0}^{t}v_i(t)\,dt$$

Haurem de mirar quina relació té $v_o(0)$ amb $v_B(0)$, que és la tensió en el condensador.

$$v_B = V_A = \frac{V_o}{2} \Rightarrow V_o(0) = 2v_B(0)$$

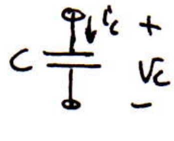
Com que el què sabem és la tensió inicial al condensador, la sortida serà:

$$\boxed{v_o(t) = 2v_B(0) + \frac{2}{RC}\int_0^t v_i(t)\,dt}$$

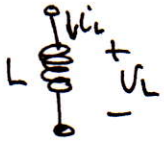
5.4. COMPORTAMENT EN CONTÍNUA

Hem vist, pels models de la bobina i el condensador, que per senyals continuos, podíem trobar que la intensitat al condensador o la tensió a la bobina podien ser nul·les. Això ens ajudarà a simplificar els circuits.

Ens serà especialment útil quan volguem trobar els valors inicials a la bobina o al condensador.



$i_c = C\dfrac{dv_c}{dt}$ si v_c és contínua $= ct \Rightarrow i_c = 0 \Rightarrow$ c.o.

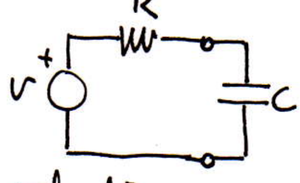


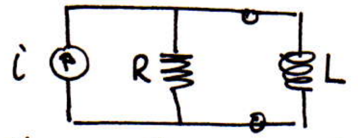
$v_L = L\dfrac{di_L}{dt}$ si i_L és contínua $= ct \Rightarrow v_L = 0 \Rightarrow$ c.c.

5.5. ANÀLISI DE CIRCUITS DE PRIMER ORDRE AMB EXCITACIONS CONSTANTS

Tractarem en aquest tema circuits que tinguin un sol element dinàmic (L o C), ja que a l'analitzar el circuit ens sortiran equacions diferencials. i si tinguéssim més elements dinàmics, matemàticament seria força complicat de resoldre. (Deixarem els circuits més complicats pel curs vinent, quan treballem amb transformades de Laplace).

Per analitzar els circuits ho farem com fins ara, però ens sortiran derivades. Per això, intentarem simplificar al màxim els circuits i aprendrem a analitzar circuits tipus com els següents:

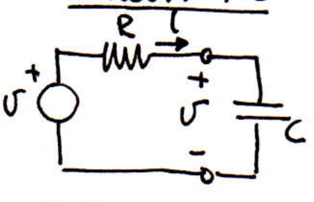




Això vol dir que per circuits més complicats haurem de buscar l'equivalent Thevenin (per condensador) o el Norton (per bobina), per reduir-lo a aquest i saber-lo analitzar.

En aquests dos casos trobarem les següents equacions diferencials que haurem de mirar de resoldre:

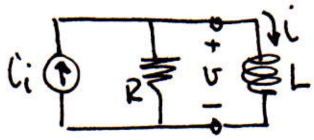
CIRCUIT RC



$v_i = i \cdot R + v$; $i = C\dfrac{dv}{dt}$

$v_i = RC\dfrac{dv}{dt} + v$

CIRCUIT RL

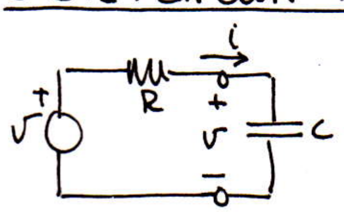


$i_i = \dfrac{v}{R} + i$; $v = L\dfrac{di}{dt}$

$i_i = \dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} + i$

Veiem que tenim dues equacions diferencials duals. Quan n'haguem resolt una, l'altra serà igual. Començem pel circuit RC, amb el qual treballarem més habitualment.

5.5.1. Circuit RC



Partim d'aquest circuit, del qual ja hem trobat l'equació diferencial a resoldre

$$v_i = RC\frac{dv}{dt} + v$$

Veiem que la solució de l'equació diferencial dependrà de:

→ Senyal d'entrada $v_i(t)$
→ Valors de R i C
} Això és igual que pels circuits resistius fets fins ara:

→ Recordem que els condensadors tenen memòria, per tant també dependrà dels valors passats. Això serà possible ja que l'equació diferencial pot tenir solució encara que l'entrada sigui nul·la. Això no passava amb els circuits resistius.

Trobem primer la solució si l'entrada és nul·la (resoldrem l'equació homogènia).

$$RC\frac{dv}{dt}+v=0$$ Si la funció més la derivada ha de ser nul·la, haurà de ser exponencial.

Provem solucions del tipus:

$$v=Ke^{at} \quad \text{on} \quad \frac{dv}{dt}=Ka\,e^{at}$$

Posem-ho a l'equació i busquem a i K.

$$RCKa\,e^{at}+Ke^{at}=0 \Rightarrow Ke^{at}(RCa+1)=0$$

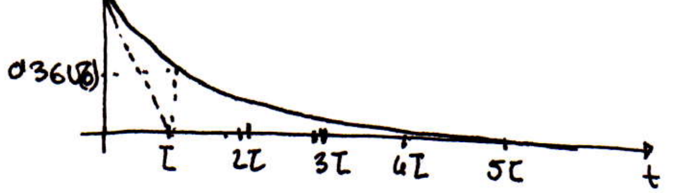
$$RCa+1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{RC} \Rightarrow v=Ke^{-t/RC}$$

Ara podem buscar K si coneixem els valors per $t=0$.

$$v(0)=K\cdot e^{-0/RC}=K\cdot e^{0}=K$$

Per tant, la solució homogènia serà:

$$\boxed{v(t)=v(0)\,e^{-\frac{t}{RC}}}$$ RC serà τ, la constant de temps.



Veiem que quan l'entrada és nul·la, la solució és una exponencial.
Recordem que l'exponencial, al cap d'un temps de 5τ, ja podem considerar que s'ha extingit.

Si el producte RC és gran, l'exponencial tardarà més a extingir-se. Al cap d'un τ, el senyal està multiplicat per 0'36.

Observem que la sortida per entrada nul·la depèn de la tensió que el condensador tenia abans de $t=0$.

Si per algun circuit concret, del qual no hem buscat l'equivalent thevenin, ens surt aquesta mateixa equació diferencial, ara ja en sabrem la solució.

Ara buscarem la solució particular de l'equació, és a dir, per una entrada concreta. En aquest cas, suposarem que la nostra entrada és un graó per una constant.

Suposem $v_i(t) = v_A\, u(t)$, aleshores l'equació quedaria:

$$RC\frac{dv}{dt} + v = v_A \cdot u(t)$$

Com que $u(t)$ val 0 per $t<0$ i val 1 per $t>0$, podem considerar:

$$RC\frac{dv}{dt} + v = v_A \quad \text{per } t>0$$

Veiem que una possible solució particular és $v = v_A$ ja que:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{i aleshores} \quad v_A = v_A$$

La solució final estarà composada per la solució homogènia més la particular. Haurem de tornar a calcular la constant de l'exponencial segons les condicions inicials tal i com hem fet abans.

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = Ke^{-t/RC} + v_A$$

$$v(0) = K + v_A \Rightarrow K = v(0) - v_A$$

Aleshores:

$$v(t) = \underbrace{(v(0) - v_A)\,e^{-t/RC}}_{\text{Resposta lliure}} + \underbrace{v_A}_{\text{Resposta forsada.}}$$

- Resposta lliure: la forma del senyal depèn del circuit.
- Resposta forsada: la forma del senyal depèn de l'entrada

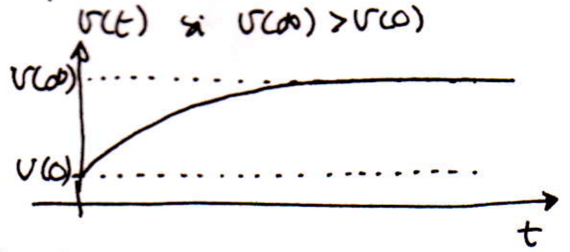
Quan $t \to \infty$ tenim $v(\infty) = (v(0) - v_A)\underbrace{e^{-\infty}}_{0} + v_A \Rightarrow v(\infty) = v_A$

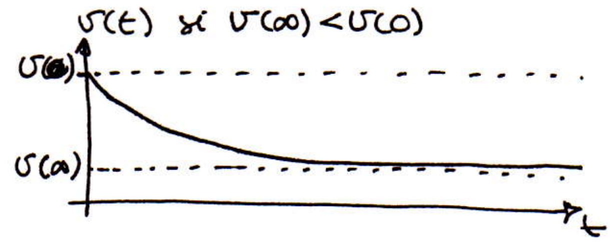
Per tant podem dir que v_A és la condició final. D'aquesta manera podem dir que la solució serà:

$$\boxed{v(t) = (v(0) - v(\infty))\,e^{-t/RC} + v(\infty)}$$

Cada vegada que tinguem un circuit RC, podrem dir directament que la solució és aquesta.

Gràficament tindrem una forma diferent si $v(0)$ és gran o petita en comparació a $v(\infty)$.





De la mateixa manera que hem dit que una part era resposta lliure i l'altre resposta forsada, també podríem diferenciar entre sortida per entrada zero i sortida sense condicions inicials:

$$v(t) = \underbrace{v(0)\, e^{-t/RC}}_{\text{entrada zero}} + \underbrace{(1 - e^{-t/RC})\, v(\infty)}_{\text{sense C.I.}}$$

Veiem doncs que la sortida depèn de:

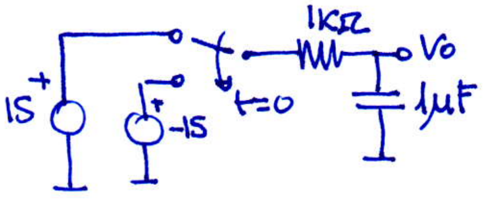
- → Constant de temps: $\tau = RC$
- → condició inicial: en $t=0 \rightarrow v(0)$
- → Condició final (o amplitud del graó d'entrada): en $t=\infty \rightarrow v_A = v(\infty)$

La tensió final sol venir donada per l'amplitud del graó d'entrada. en cas de no ser així, és fàcil de trobar, ja que un cop han passat $5\tau = 5RC$, la tensió del condensador és constant, i per tant el corrent és nul. Així buscaríem la tensió en el condensador quan aquest és un c.o.

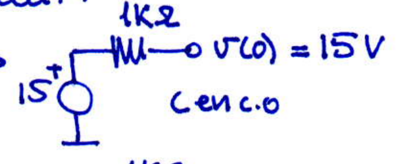
Caldria fer un procés similar quan cal calcular la tensió inicial si aquesta no ens és donada. Abans de $t=0$, podem suposar que fa molt temps que no hi ha canvis, i que la tensió és constant. Així el condensador es comporta com un c.o i es pot buscar la seva tensió fàcilment.

Aquests càlculs seran habituals quan ~~t~~ tinguem interruptors al circuit que passen d'una tensió contínua a una altra diferent. (és el mateix que un graó).

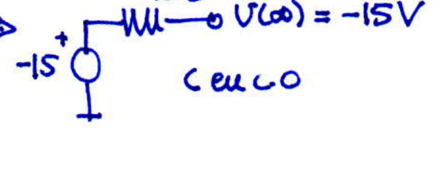
Ex: Trobar v_0 en el següent circuit:



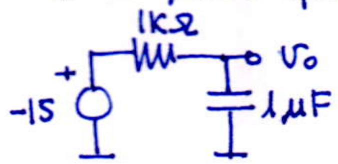
C.I ⇒



C.F ⇒



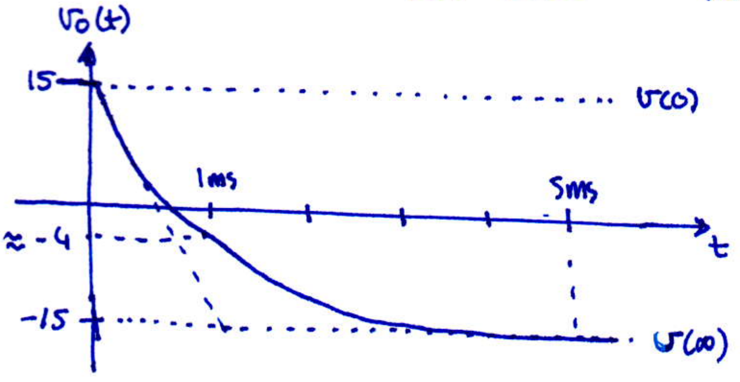
L'RC final que caldria analitzar és:



Ja és directament un RC, així la solució serà:

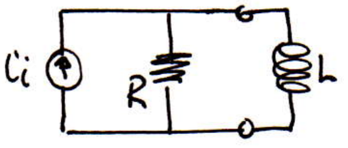
$$v_o(t) = (15-(-15))\,e^{-t/10^3\cdot 10^{-6}} + (-15) \quad \text{per } t>0$$

$$v_o(t) = 30\,e^{-10^3 t} - 15$$



5.5.2. Circuit RL

Ara, haurem de fer pel circuit RL el mateix que hem fet pel circuit RC.



Recordem que per aquest circuit havíem trobat la següent equació diferencial.

$$i_i = \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i$$

Busquem la solució homogènia:

$\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = 0$ Provem amb solucions exponencials: $i(t) = k e^{at}$

$$\frac{L}{R}\cdot k\cdot a\cdot e^{at} + k e^{at} = 0 \Rightarrow k e^{at}\left(\frac{L}{R}a + 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{L}{R}a + 1 = 0$$

Així: $a = -\frac{R}{L} \Rightarrow i(t) = k e^{-\frac{R}{L}t}$

Busquem K per les condicions inicials:

$i(0) = k e^{-\frac{R}{L}0} \Rightarrow k = i(0) \Rightarrow \boxed{i(t) = i(0)\,e^{-\frac{R}{L}t}}$ $\frac{L}{R} = L_G$ és la ct. de temps.

Ara trobarem la solució particular seguint els mateixos passos que amb el circuit RC.

$\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = i_A$ per $t>0$ (entrada graó $i_A u(t)$)

Provem amb solucions particulars del tipus $i = i_A$ i veiem que compleix l'equació

Ara haurem de tornar a buscar la constant de la solució homogènia amb les condicions inicials:

$i(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + i_A$ (ja que la solució està composada de l'homogènia i la particular).

$i(0) = K \cdot e^{-\frac{R}{L}0} + i_A \rightarrow i(0) = K + i_A \Rightarrow K = i(0) - i_A$

Igual que passava amb el condensador, i_A serà la intensitat final i li podrem dir $i(\infty)$. D'aquesta manera la solució serà:

$$\boxed{i(t) = (i(0) - i(\infty))\, e^{-\frac{R}{L}t} + i(\infty)}$$

Sobre les condicions inicials i finals farem les mateixes consideracions que hem fet pel condensador.

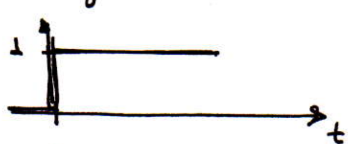
5.6. FUNCIONS CONSTANTS A TRAMS

Hem comentat que utilitzaríem com a entrades funcions constants a trams. Hem parlat del graó, però hi ha modificacions d'aquest o altres formes periòdiques que són utilitzades. Anem a veure les principals.

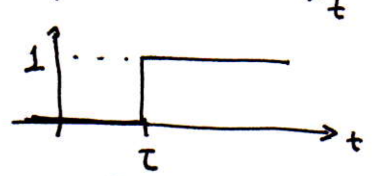
5.6.1. Funció graó

Tindrem la funció original i variacions d'aquesta.

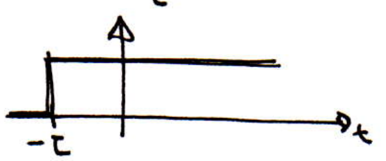
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$



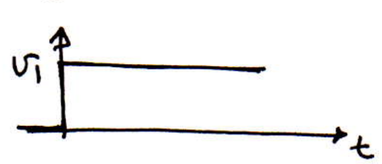
$$u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & t<\tau \\ 1 & t>\tau \end{cases}$$



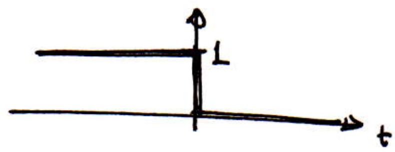
$$u(t+\tau) = \begin{cases} 0 & t<-\tau \\ 1 & t>-\tau \end{cases}$$



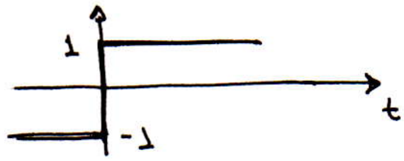
$$v_1 \cdot u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ v_1 & t>0 \end{cases}$$



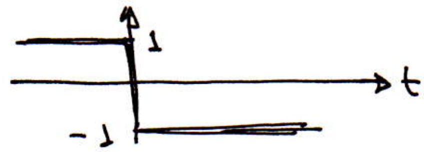
$$1 - u(t) = \begin{cases} 1 & t<0 \\ 0 & t>0 \end{cases}$$



$$2u(t)-1 = \begin{cases} -1 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$



$$1-2u(t) = \begin{cases} 1 & t<0 \\ -1 & t>0 \end{cases}$$

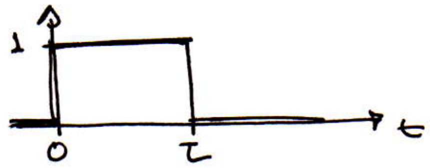


En qualsevol d'aquests casos, si és l'entrada d'un RC, ja sabem quina és la tensió inicial i final. Matemàticament parlant, quan tenim que el canvi no es produeix en l'origen, hauríem de posar a l'exponencial, també $t-\tau$ en lloc de t. Normalment no ho fem sempre que no perdem de vista que ara l'origen és a τ.

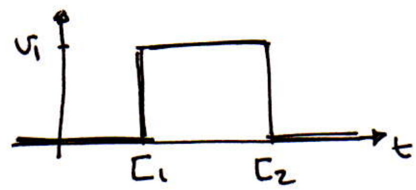
5.6.2. Funció pols

Amb una combinació de graons podem construir polsos.

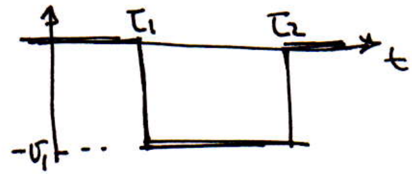
$$u(t)-u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0<t<\tau \\ 0 & t>\tau \end{cases}$$



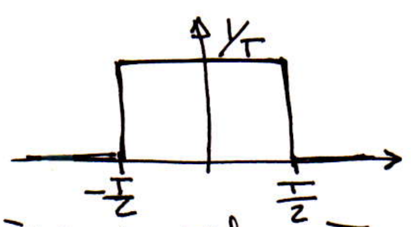
$$v_1\big(u(t-\tau_1)-u(t-\tau_2)\big) = \begin{cases} 0 & t<\tau_1 \\ v_1 & \tau_1<t<\tau_2 \\ 0 & t>\tau_2 \end{cases} \qquad \tau_1<\tau_2$$



$$v_1\big(u(t-\tau_2)-u(t-\tau_1)\big) = \begin{cases} 0 & t<\tau_1 \\ -v_1 & \tau_1<t<t_2 \\ 0 & t>\tau_2 \end{cases} \qquad \tau_1<\tau_2$$



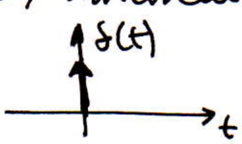
$$\frac{1}{T}\left(u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) = \begin{cases} 0 & t<-\frac{T}{2} \\ \frac{1}{T} & -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2} \\ 0 & t>\frac{T}{2} \end{cases}$$



↓

Aquest pols té la peculiaritat de tenir àrea 1. Si fem T petita, tendint a 0, tindrem la funció delta o impuls.

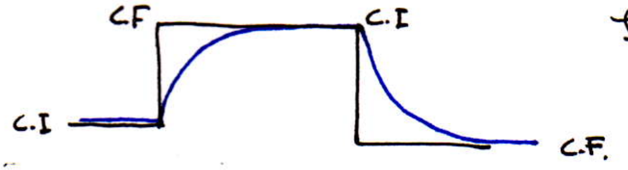
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t\neq 0 \\ \infty & t=0 \end{cases}$$



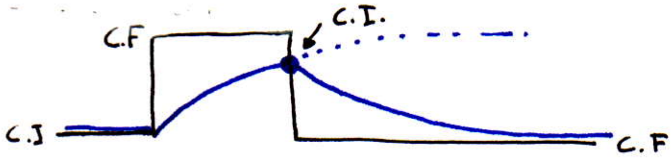
continua tenint àrea 1.

Podríem tenir altres combinacions de graons, i per tant altres polsos, centrats a llocs diferents i d'amplituds diferents.

Els tractarem com si fossin dos graons separats. El circuit RC respondrà amb una exponencial a cada canvi. L'única precaució que hem de tenir és veure si l'exponencial anterior ja s'ha extingit quan hi ha el canvi següent.



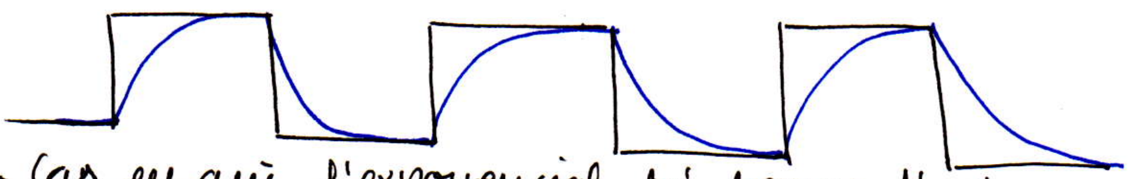
Ja s'ha extingit, així que les C.I. i C.F ens vindran donades pel mateix pols.



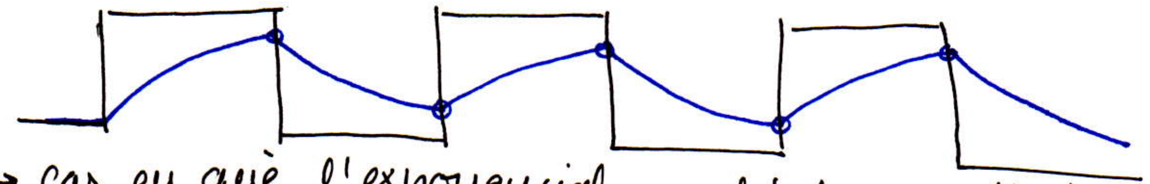
No s'ha extingit. Pel primer canvi el pols ens marca les C.I i C.F. Pel segon canvi, hem de calcular quin valor té la primera exponencial quan hi ha el segon canvi i aquest valor, quan s'acaba l'exponencial, serà la C.I. La C.F. ens ve marcada pel pols.

5.6.3. Funció periòdica

Si posem un seguit de polsos l'un darrera l'altre, tindrem una funció periòdica. En aquest cas haurem de fer el mateix que per un sol pols i anar-ho repetint.



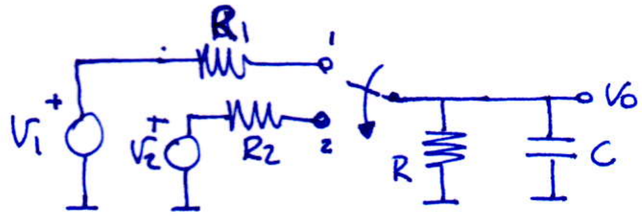
↳ Cas en què l'exponencial té temps d'extingir-se totalment.



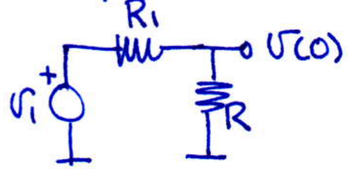
↳ Cas en què l'exponencial no té temps d'extingir-se i haurem de calcular les C.I i C.F amb el valor de la funció en l'instant del canvi.

A continuació veurem alguns exemples:

Ex: Trobar la tensió al condensador.



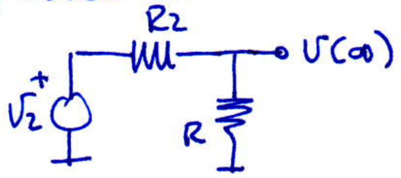
Trobem primer la condició inicial, amb l'interruptor en la posició 1:



El condensador es comporta com un c.o., fa molt temps que no hi ha cap canvi.

$$V(0) = \frac{R}{R_1+R}\cdot V_1$$

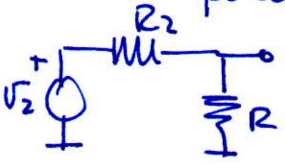
Trobem ara la condició final, amb l'interruptor en la posició 2:



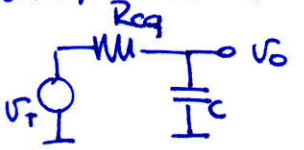
El condensador també es comporta com un c.o., perquè fa temps que no hi ha canvis.

$$V(\infty) = \frac{R}{R_2+R}\cdot V_2$$

Ara busquem quin és l'equivalent Thevenin per $t>0$.



$$V_T = \frac{R}{R_2+R}\cdot V_2 \qquad R_{eq} = \frac{R\cdot R_2}{R+R_2}$$



Ara sabem que la solució és:

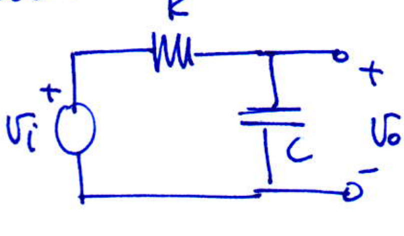
$$V(t) = \left(V(0) - V(\infty)\right) e^{-t/R_{eq}C} + V(\infty)$$

$$V(t) = \left(\frac{R}{R_1+R}\cdot V_1 - \frac{R}{R_2+R} V_2\right) e^{-\frac{R_2+R}{C\cdot R_2 R} t} + \frac{R}{R_2+R} V_2$$

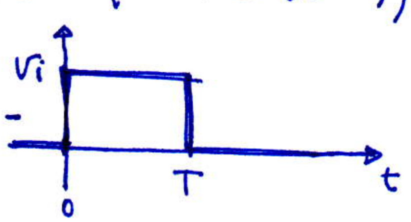
Si ens interessés trobar els corrents, faríem:

$$i_{R_2} = \frac{V_2 - V_C}{R_2} \quad ; \quad i_R = \frac{V_C}{R} \quad ; \quad i_C = i_{R_2} - i_R = C\frac{dV_C(t)}{dt}$$

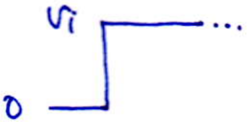
Ex: Trobar la tensió al condensador si l'entrada és un pols:



$$V_i(t) = V_i\left(u(t) - u(t-T)\right)$$

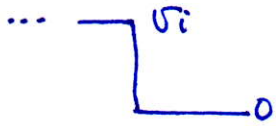


Busquem la sortida pel primer canvi:



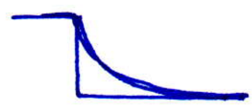
$$v_o(t) = (0 - v_i)e^{-\frac{t}{RC}} + v_i = v_i\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

→ Si $T > 5\tau$, l'exponencial ja s'haurà extingit quan arribi el següent canvi. Aleshores:

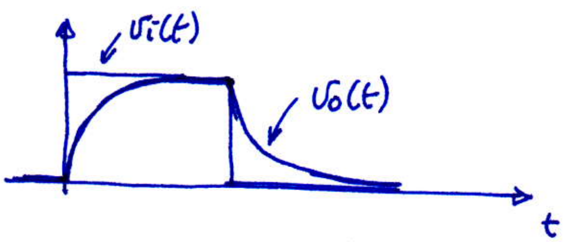


$$v_o(t) = (v_i - 0)e^{-t/RC} + 0 = v_i e^{-t/RC}$$

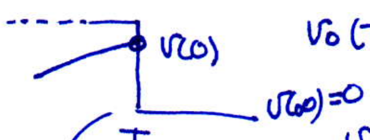
↳ diem 0, però serà a T



Així tindríem:



→ Si $T < 5\tau$, l'exponencial encara no s'haurà extingit, aleshores, haurem de calcular el valor de l'exponencial per T i aquest serà la condició inicial del següent canvi:

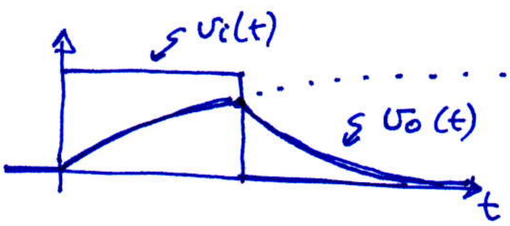


$$v_o(T) = v_i\left(1 - e^{-T/RC}\right) = v(0)$$

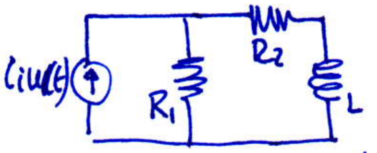
$$v_o(t) = (v(0) - 0)e^{-t/RC} + 0 = v_i\left(1 - e^{-T/RC}\right)e^{-t/RC}$$

↳ diem t=0 per simplificar, però és T.

Així tindríem:



Ex: 8.6. llibre



Busquem l'equivalent Norton:

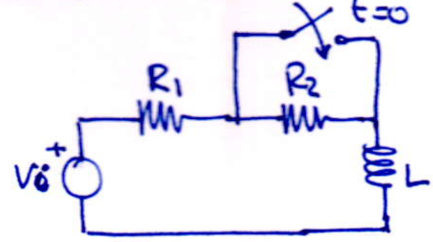
$$i_{cc} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_i u(t) \qquad R_{eq} = R_1 + R_2$$

Circuit equivalent:

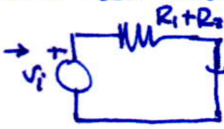
$$i(0) = 0, \quad i(\infty) = i_{cc} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_i, \quad \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$$

$$i(t) = (i(0) - i(\infty))e^{-t/\tau} + i(\infty) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_i\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} \cdot t}\right)$$

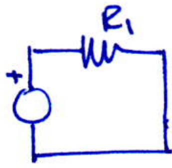
Ex: 8.8. llibre



Trobem les condicions inicial i final

C.I →


$i(0) = \frac{V_i}{R_1+R_2}$ interruptor obert

C.F →


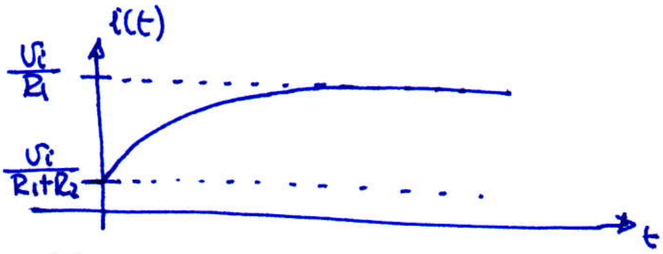
$i(\infty) = \frac{V_i}{R_1}$ interruptor obert.

Req amb int tancat:

$R_{eq} = R_1 \Rightarrow \tau = \frac{L}{R_1}$

Així la solució serà:

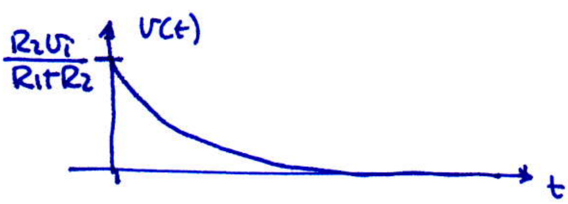
$$i(t) = (i(0) - i(\infty))e^{-t/\tau} + i(\infty) \Rightarrow i(t) = \left(\frac{V_i}{R_1+R_2} - \frac{V_i}{R_1}\right)e^{-\frac{R_1}{L}t} + \frac{V_i}{R_1}$$



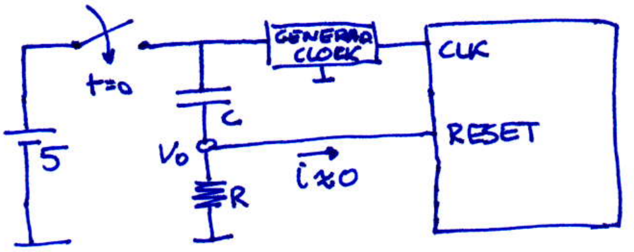
Si volèssim trobar la tensió:

$$V(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -L\cdot\frac{R_1}{L}e^{-\frac{R_1}{L}t}\left(\frac{V_i}{R_1+R_2} - \frac{V_i}{R_1}\right) = -\left(\frac{V_i \cdot R_1}{R_1+R_2} - V_i\right)e^{-\frac{R_1}{L}t}$$

$$V(t) = \frac{R_2 V_i}{R_1+R_2}e^{-\frac{R_1}{L}t}$$

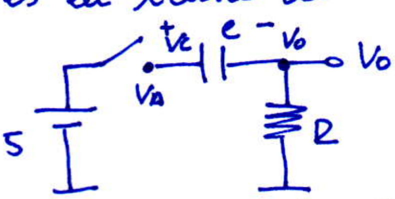


Ex: Circuit per per un reset automàtic a dispositius utilitzats per digitals, en el moment d'engegar-los.



En el moment que tanquem l'interruptor arrencarà el generador de clock. Voldríem que, en aquest moment, es produís un Reset.

Analitzem el circuit CR i mirem quina és la tensió Vo quan es tanca l'interruptor. Hem de vigilar, ja que ara Vo no és la tensió al condensador.



Int. obert → no passa corrent i C com c.o.

$V_A = 0$, $V_o = 0 \Rightarrow V_c = 0$ C.I.

Int. tancat → Al cap de molta estona, C com c.o.

$V_A = 5$, $V_o = 0$ (no corrent a R) ⇒

Req que veu el C (Thevenin) és R. ⇒ $V_c = 5$ C.F.

Amb aquestes dades sabem que la tensió al condensador (que no és v_o) serà:

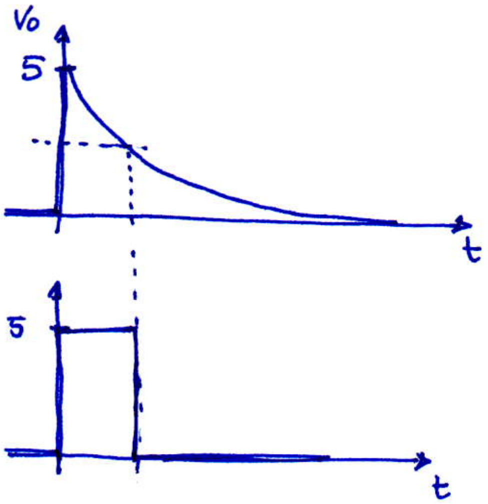
$$v_c = (v(0) - v(\infty)) e^{-t/RC} + v(\infty) = (0-5)e^{-t/RC} + 5$$

$$v_c = 5(1 - e^{-t/RC})$$

Si volem saber v_o, fem un KVL:

$$5 = v_c + v_o \Rightarrow v_o = 5 - v_c = 5 - 5 + 5e^{-t/RC} \Rightarrow \boxed{v_o = 5e^{-t/RC}}$$

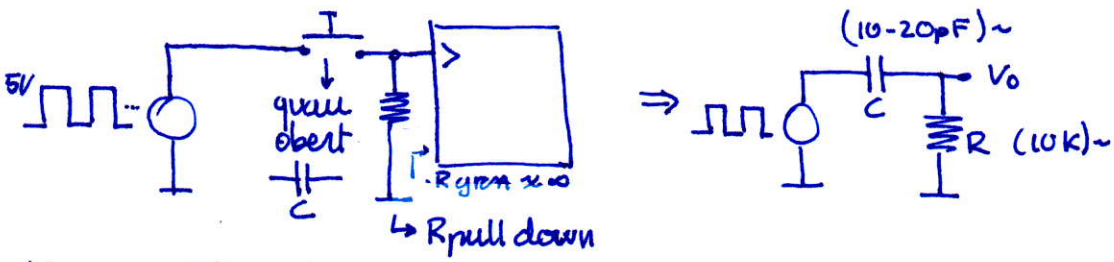
Gràficament tindríem:



Com que l'entrada reset interpretarà que li arriba un 1 si $V_o > 2'5$ i un 0 si $V_o < 2'5$, podem dir que el senyal de reset que interpretarà el dispositiu serà:

D'aquesta manera s'haurà produït un reset abans d'iniciar el funcionament.

Ex: Per il·lustrar el cas del dau electrònic. Depèn de com es posa el polsador, el circuit funcionaria sempre, encara que no estés polsat, perquè té una capacitat paràsita molt petita, però existeix. Aleshores:



Ho analitzaríem igual que abans, però ara tenim polsos, no un graó.

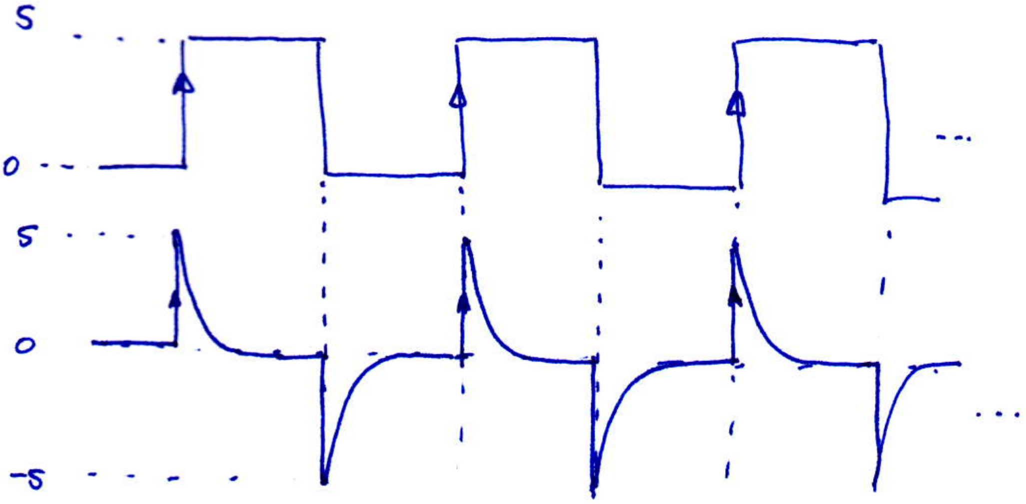
Per primer canvi:

$$\left.\begin{array}{l} v_c(0) = 0 \\ v_c(\infty) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow v_c = 5(1 - e^{-t/RC}) \Rightarrow v_o = 5 - v_c = 5e^{-t/RC}$$

Pel segon canvi:

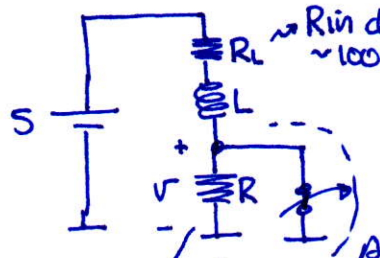
$$\left.\begin{array}{l} v_c(0) = 5 \\ v_c(\infty) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_c = 5e^{-t/RC} \Rightarrow v_o = 0 - v_c = -5e^{-t/RC}$$

Si ho dibuixem:



Interpreta els flancs de pujada com a clock i continuaria funcionant, quan nosaltres esperaríem que no funcionés més.

Ex: Cas que simula que li passaria a un transistor si li posem una bobina en sèrie: Ho podríem modelar així:



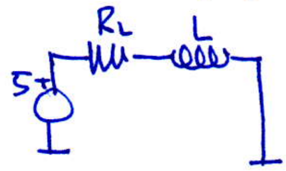
→ Rin del ~100Ω

Busquem les condicions inicials i finals per aquest circuit.

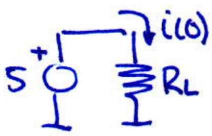
Això simula el transistor

R del transistor ≈ 100K

C.T. → Int. tancat L és un c.c.

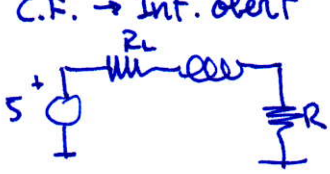


→

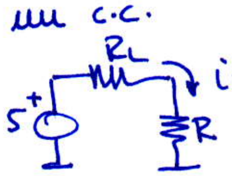


$i(0) = \frac{5}{R_L}$

C.F. → Int. obert L és un c.c.

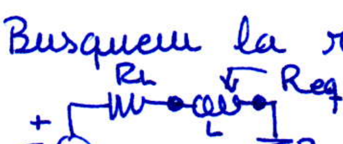


→

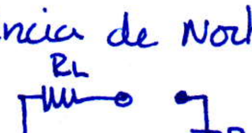


$i(\infty) = \frac{5}{R_L+R}$

Busquem la resistència de Norton:



→



$\Rightarrow R_{eq} = R_L + R$

Amb això la solució és:

$$i(t) = \left(\frac{5}{R_L} - \frac{5}{R_L+R}\right) e^{-\frac{R_L+R}{L}t} + \frac{5}{R_L+R}$$

Si posem els valors de les resistències veiem que:

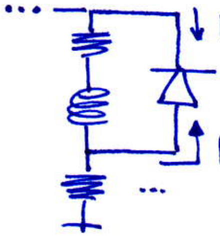
$$i(t) = (50mA - 50\mu A)\, e^{-\frac{10^5}{L}t} + 50\mu A \approx 50mA\, e^{-\frac{10^5}{L}t} + 50\mu A$$

Si ara busquem la tensió que cau a R, tindrem $v = i \cdot 100K$

$$v(t) \approx 50\cdot10^{-3}\cdot100\cdot10^{3}\cdot e^{-\frac{10^5}{L}t} + 50\cdot10^{-6}\cdot100\cdot10^{3}$$

$$v(t) \approx 5000\, e^{-\frac{10^5}{L}t} + 5$$

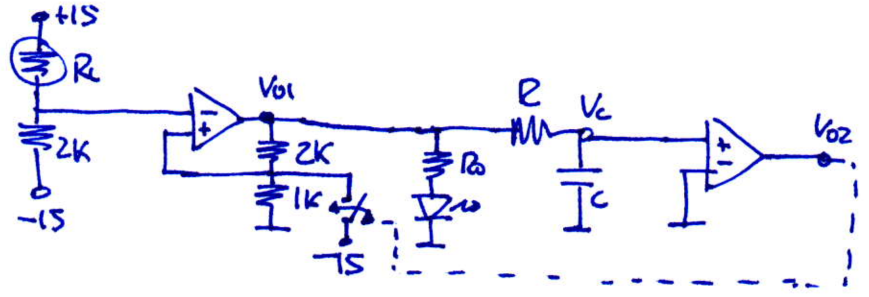
Ja es veu que no podem tenir 5.000 V, saltaria una espurna i s'espatllaria el transistor. Caldria fer algun sistema per tal que pogués passar el corrent per un altre lloc, per exemple posant un díode:



↓ no passa corrent

↑ podria passar corrent quan s'obri l'interruptor i la tensió no es faria tan gran a R.

Ex: És per il·lustrar com, en el circuit de la pàgina 3 (alarma), es pot fer un reset automàticament:



Int. controlat: si amb a V = 15 ⇒ es tanca i posa $v_p = -15$

V = −15 int. obert

$R_{L\,clar} = 2K$, $R_{L\,fosc} = 10K$

a) Explicar funcionament si inicialment LDR clar, $V_{o1} = -15$, $V_{o2} = -15$. Després s'enfosqueix un moment i torna a clar

Busquem $v_n = \frac{2K}{R_L+2K}\cdot15 - \frac{R_L}{R_L+2K}\cdot15$ clar ⇒ $v_n = 0$

fosc ⇒ $v_n = -\frac{8K}{12K}\cdot15 = -10$

Busquem $v_p = \frac{1K}{1K+2K}\,v_{o1} = \frac{1}{3}\underset{\pm15}{v_{o1}} = \pm5V$

Inicialment $v_{o1} = -15 \Rightarrow v_p = -5$ v_n clar $= 0 \Rightarrow v_n > v_p \Rightarrow v_{o1}\downarrow$

S'enfosqueix un moment: $v_n = -10$, $v_p = -5 \Rightarrow v_p > v_n \Rightarrow v_{o1}\uparrow \Rightarrow v_p = 5$

Torna a clar: $v_n = 0$, $v_p = 5 \Rightarrow v_p > v_n \Rightarrow v_{o1}\uparrow$

V_{o1} passa de -15 a 15 ⇒ C es carrega.

Primer $V_p=-15$ $V_n=0$ ⇒ $V_{o2}\downarrow$ ⇒ int obert

Quan V_p supera 0 ⇒ $V_p>0$, $V_n=0$ ⇒ $V_{o2}\uparrow$ ⇒ Int es tanca ⇒

⇒ es fa el reset, $V_{o1}\downarrow$, C es torna a descarregar, V_p torna a ser ràpidament $<V_n$ ⇒ $V_{o2}\downarrow$ ⇒ s'obre l'interruptor.

Tornem a l'estat inicial.

b) Trobar analíticament V_c per aquesta situació (en $t=0$ s'enfosqueix el LDR). Dibuixar V_{o1}, V_c i V_{o2}.

$t<0$ $V_{o1}=-15$ ⇒ $V_c(0)=-15$

$t>0$ $V_{o1}=+15$ ⇒ $V_c(\infty)=+15$

Tenim directament un RC ⇒ $R_{eq}=R$

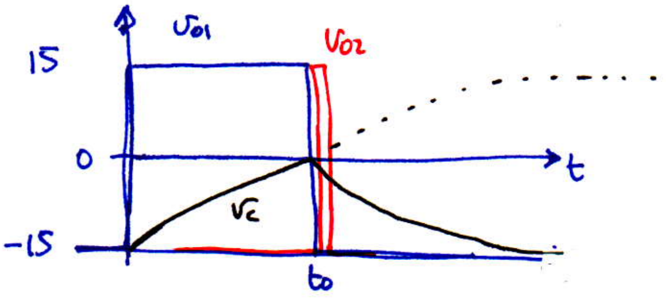
$$V_c(t)=(-15-15)e^{-t/RC}+15 \Rightarrow \underline{V_c(t)=15\left(1-2e^{-t/RC}\right)} \quad 0<t<t_0$$

Quan arribi V_c a 0, es tancarà l'interruptor i es descarregarà el C de nou. Així:

$V_{o1}=-15$ → s'apaga el LED

$$\left.\begin{array}{l} V_c(0)=0 \\ V_c(\infty)=-15 \end{array}\right\} \; V_c(t)=(0+15)e^{-t/RC}-15 \Rightarrow \underline{V_c(t)=15\left(e^{-t/RC}-1\right)} \quad t>t_0$$

$V_{o2}=-15$



c) Donar expressió per al temps que el LED estarà encès:

Igualem la primera expressió a 0.

$$0=15\left(1-2e^{-t_0/RC}\right) \Rightarrow 15=30e^{-t_0/RC} \Rightarrow \frac{1}{2}=e^{-t_0/RC}$$

$$\ln 0'5=-\frac{t_0}{RC} \Rightarrow t_0=-RC\ln 0'5 \Rightarrow \boxed{t_0=0'7\,RC}$$

d) Fem $R=1M\Omega$ i busquem C per tal que el LED estigui encès 7seg.

$$\text{si } t_0=7\text{seg} \Rightarrow 7=0'7\cdot RC \Rightarrow \underset{10^6}{R}C=10 \Rightarrow C=\frac{10}{R}=\frac{10}{10^6}=10^{-5} \Rightarrow \underline{C=10\mu F}$$