TEMA 4: MÈTODES D'ANÀLISI SISTEMÀTIC

4.1. INTRODUCCIÓ

Fins ara hem utilitzat les lleis de Kirchhoff per analitzar els circuits, però ho hem fet d'una manera intuïtiva, sense seguir cap sistematització. Així ens sortien moltes equacions i moltes variables. Quan els circuits es vagin complicant, caldrà utilitzar el mínim de variables i utilitzar un mètode més sistemàtic si volem trobar els resultats d'una manera eficient.

Fins ara el què fèiem era plantejar les equacions a les connexions i als elements. D'aquesta manera, per un circuit amb N nodes i E elements tindríem:

→ Identificar una variable i i una v per cada element ⇒ ⇒ 2E variables.

→ Escriure KCL's a N-1 nodes ⇒ N-1 equacions

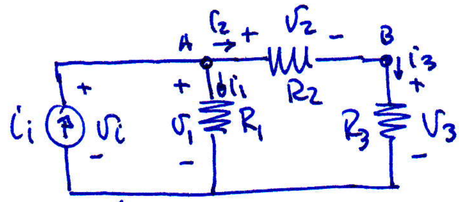
→ Escriure KVL's a E-(N-1) malles ⇒ E-(N-1) equacions

→ Escriure condicions als elements ⇒ E equacions.

D'aquesta manera tenim 2E variables i 2E equacions

Vegem que plantejaríem en un parell de casos:

Ex: 5.1. llibre



KCL → $i_i - i_1 - i_2 = 0$

$i_2 - i_3 = 0$

KVL → $-v_i + v_i = 0$

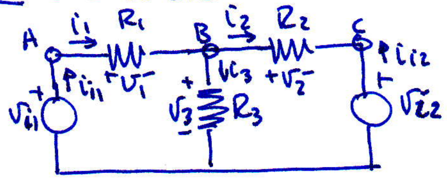
$-v_1 + v_2 + v_3 = 0$

Dispositius:

i_i , $v_1 = i_1 \cdot R_1$, $v_2 = i_2 R_2$, $v_3 = i_3 R_3$

Tindríem doncs, 8 variables i 8 equacions. En realitat serien 7, perquè una de les variables seria ja coneguda.

Ex: 5.2 llibre



KCL → $i_{i1} - i_1 = 0$

$i_1 - i_2 - i_3 = 0$

$i_2 + i_{i2} = 0$

KVL → $-v_{i1} + v_1 + v_2 = 0$

$-v_3 + v_2 + v_{i2} = 0$

Dispositius:

v_{i1} , v_{i2} , $v_1 = i_1 R_1$, $v_2 = i_2 R_2$, $v_3 = i_3 R_3$

Aquí tindrem 10 equacions i 10 incògnites. De fet només serien 8, ja que dues són conegudes.

Per no haver de fer tot això, amb el mètode sistemàtic, mirarem d'agafar les mínimes variables i així tenir les mínimes equacions. Agafarem el què en direm variables generadores, que seran unes poques, i a partir d'elles es podran trobar la resta. Tampoc caldrà que les trobem totes, només les que ens interessen. Per això, haurem d'utilitzar un mètode per resoldre sistemes d'equacions que ens vagi bé.

4.2. TÈCNIQUES DE RESOLUCIÓ DE SISTEMES D'EQUACIONS

Els mètodes sistemàtics d'anàlisi ens portaran a sistemes d'equacions, que s'acabaran posant en forma matricial.
Hi ha diversos mètodes matemàtics per resoldre aquests sistemes. Si tenim matrius fins a 3x3, ens anirà bé la regla de Cramer. Hi ha altres mètodes, però aquest va bé. Si tinguéssim matrius més grans, ho hauríem de fer d'altres maneres, o amb eines informàtiques.
Si ho fem d'aquesta manera, perdrem de vista el circuit, però podrem generalitzar i sistematitzar, que és el que volem.
Acostumarem a arribar a unes equacions d'aquesta forma (ho fem amb un sistema 3x3, i si és 2x2 serà més senzill):

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{posat en forma matricial tindríem: } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

En general, si la matriu mové d'un circuit tindríem:

a_{ij}: estan en funció dels paràmetres del circuit
b_i: són fonts que injecten senyal al circuit
x_i: són les incògnites que volem trobar

Si volem resoldre aquest sistema per la regla de Cramer, aquesta ens diu que:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$ on les D són els determinants:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Recordem com es resolen els determinants 2x2 i 3x3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

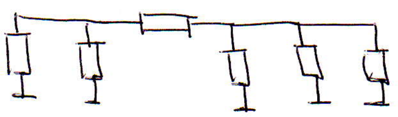
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Amb això, ja podem començar a veure els diferents mètodes d'anàlisi sistemàtic.

4.3. MÈTODE DE LES TENSIONS NODALS. ANÀLISI NODAL

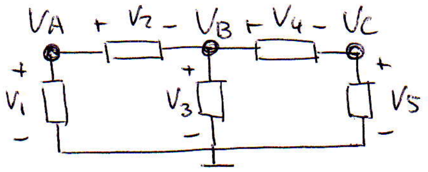
Aquest mètode es basa en fer KCLs als nodes.
L'objectiu serà determinar les tensions a cada node, respecte el node de referència (en lloc de buscar les variables a cada circuit). La resta de variables es generaran fàcilment a partir d'aquestes.

Per utilitzar aquest mètode cal tenir en compte el següent:
- → Necessàriament hi ha d'haver un node de referència (massa)
- → Amb un circuit amb N nodes, hi hauran N-1 tensions nodals. Per tant necessitarem N-1 equacions i no 2E com abans.
- → El mètode serà especialment útil si N-1 << 2E. Això sol passar quan hi ha molts elements en paral·lel.



2E = 12
N-1 = 2

En un circuit com el següent faríem:

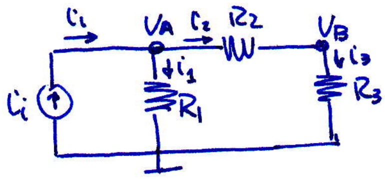


les tensions nodals serien: V_A, V_B i V_C
Per trobar les altres tensions faríem:
$V_1 = V_A$, $V_2 = V_A - V_B$, $V_3 = V_B$, $V_4 = V_B - V_C$, $V_5 = V_C$

Les intensitats es buscaran a partir de les tensions i les característiques i-v del elements.

Per fer l'anàlisi, els passos a seguir són:
- → Seleccionar el node de referència
- → Assignar una tensió nodal a cada node.
- → Assignar un corrent a cada element.
- → Fer un KCL als N-1 nodes del circuit.
- → Utilitzar els KVL i les característiques i-v dels elements per posar els corrents en funció de les tensions nodals
- → Resoldre el sistema de N-1 equacions i N-1 variables.

Ex: 5.3. llibre



• KCL → $i_i - i_1 - i_2 = 0$
$i_2 - i_3 = 0$

• amb KVL i característiques i-v podem escriure:

i_i conegut , $i_1 = G_1 V_A$, $i_2 = G_2 (V_A - V_B)$, $i_3 = G_3 V_B$

• Posem aquests valors als KCL's:

$$\left.\begin{array}{l} i_i - G_1 V_A - G_2(V_A - V_B) = 0 \\ G_2(V_A - V_B) - G_3 V_B = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reordenem}} \begin{array}{l} V_A(G_1+G_2) - V_B G_2 = i_i \\ -V_A G_2 + V_B(G_2+G_3) = 0 \end{array}$$

• Ara ho podem posar en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Abans de resoldre veiem si podem treure algunes conclusions, per poder plantejar això directament, estalviant-nos així alguns passos:

→ La matriu té simetria respecte la diagonal.
→ A la diagonal hi ha la suma de conductàncies que arriben al node.
→ Fora de la diagonal hi -G's que comparteixen nodes.
→ Al segon membre hi ha les fonts de corrent que entren al node.

D'aquí en endavant, si ens interessa, podem plantejar directament la matriu a partir del circuit.

Anem ara a resoldre el sistema d'equacions:

$$V_A = \frac{\begin{vmatrix} i_i & -G_2 \\ 0 & G_2+G_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{vmatrix}} = \frac{i_i(G_2+G_3)}{(G_1+G_2)(G_2+G_3) - G_2^2} = \frac{i_i(G_2+G_3)}{G_1G_2+G_1G_3+G_2G_3}$$

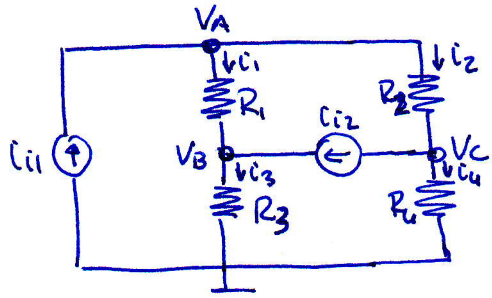
$$V_B = \frac{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & i_i \\ -G_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{vmatrix}} = \frac{G_2 i_i}{G_1G_2+G_1G_3+G_2G_3}$$

Si ens interessés podríem passar el resultat a R's en lloc de G's. (multiplicant numerador i denominador per totes les R's)

$$V_A = \frac{R_1R_3 + R_1R_2}{R_1+R_2+R_3} i_i$$

$$V_B = \frac{R_1 R_3}{R_1+R_2+R_3} i_i$$

Ex: 5.4. llibre



$$\text{KCL} \rightarrow \begin{array}{l} i_{i1} - i_1 - i_2 = 0 \\ i_1 + i_{i2} - i_3 = 0 \\ i_2 - i_{i2} - i_4 = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (V_A - V_B)G_1 + (V_A - V_C)G_2 = i_{i1} \\ -(V_A - V_B)G_1 + V_B G_3 = i_{i2} \\ -(V_A - V_C)G_2 + V_C G_4 = -i_{i2} \end{array} \right.$$

Ho reordenem i quedarà:

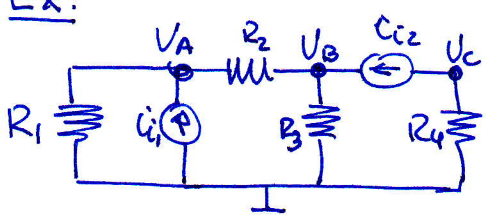
$$V_A(G_1+G_2) - V_B G_1 - V_C G_2 = i_{i1}$$
$$-V_A G_1 + V_B(G_1+G_3) = i_{i2}$$
$$-V_A G_2 - 0 + V_C(G_2+G_4) = -i_{i2}$$

Posat en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_1 & -G_2 \\ -G_1 & G_1+G_3 & 0 \\ -G_2 & 0 & G_2+G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{i1} \\ i_{i2} \\ -i_{i2} \end{bmatrix}$$

Veiem que, seguint les normes que hem deduït abans, podríem haver escrit la matriu directament.
Si ho preferim, ho podrem fer sempre així.

Ex:



Podem plantejar la matriu directament.

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2+G_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{i1} \\ i_{i2} \\ -i_{i2} \end{bmatrix}$$

Fins ara, hem vist només circuits que tenien fonts d'intensitat. Ara hem de veure com ho farem si tenim circuits que contenen fonts controlades d'intensitat, fonts de tensió (controlades o no) i amplificadors operacionals:

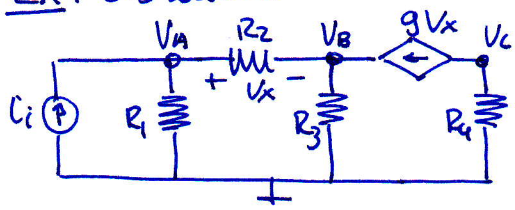
4.3.1. Anàlisi nodal amb circuits amb fonts controlades d'intensitat

Inicialment tractarem la font controlada com si fos independent i plantejarem el sistema igual que abans. Després posarem la tensió o el corrent que controla la font en funció de les tensions nodals, i ho passarem al primer membre.

$$i = g\,v_x \Rightarrow i = g \cdot f(\text{tensions nodals})$$
$$i = \beta\,i_x \Rightarrow i = \beta \cdot f(\text{tensions nodals})$$

Podem plantejar els KCL o directament com abans i després reagrupar. En tot cas, ara, la matriu, perderà la simetria.
Veiem alguns exemples:

Ex: 5.5 llibre



Tenim ara la font controlada per tensió.
Podem plantejar els KCL's o arribar a la matriu directament, però ho escriuríem en forma d'equacions.

Veiem que és un cas molt igual que l'últim exercici que hem fet, canviant i_i per la font controlada.

$$V_A(G_1+G_2) - G_2V_B = i_i$$
$$-V_AG_2 + V_B(G_2+G_3) = gV_x$$
$$V_CG_4 = -gV_x$$

Posem V_x en funció de les tensions nodals i reordenem:
$V_x = V_A - V_B$

$$V_A(G_1+G_2) - G_2V_B = i_i$$
$$-V_A(G_2+g) + V_B(G_2+G_3+g) = 0$$
$$V_Ag - V_Bg + V_CG_4 = 0$$

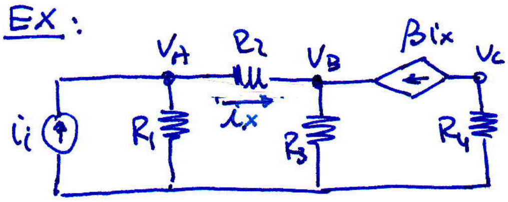
Ara ho posaríem en forma matricial i resoldríem. Si volem trobar V_0, aquesta és V_C.

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -(G_2+g) & G_2+G_3+g & 0 \\ g & -g & G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_0 = V_C = \frac{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & i_i \\ -(G_2+g) & G_2+G_3+g & 0 \\ g & -g & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -(G_2+g) & G_2+G_3+g & 0 \\ g & -g & G_4 \end{vmatrix}} = \frac{g(G_2+g)i_i - g(G_2+G_3+g)i_i}{(G_1+G_2)(G_2+G_3+g)G_4 - G_2(G_2+g)G_4} =$$

$$V_0 = \frac{-g\,G_3\,i_i}{G_1G_2G_4 + G_1G_3G_4 + G_1G_4g + G_2G_3G_4} = \frac{-R_1R_2R_4g}{R_1+R_2+R_3+R_2R_3g}\,i_i$$

Ex:



Fem el mateix circuit que abans, però ara la font està controlada per corrent.
Fem el plantejament directe, i després substituïm i_x.

$$V_A(G_1+G_2) - G_2V_B = i_i$$
$$-V_AG_2 + V_B(G_2+G_3) = \beta i_x$$
$$V_CG_4 = -\beta i_x$$

$$i_x = \frac{V_A - V_B}{R_2} = G_2(V_A - V_B) = V_AG_2 - V_BG_2$$
$$\beta i_x = V_A\beta G_2 - V_B\beta G_2$$

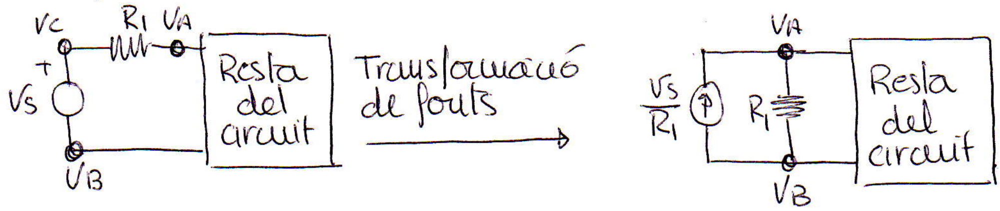
$$V_A(G_1+G_2) - G_2V_B = i_i$$
$$-V_A(G_2+\beta G_2) + V_B(G_2+G_3+\beta G_2) = 0$$
$$V_A\beta G_2 - V_B\beta G_2 + V_CG_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -(1+\beta)G_2 & (1+\beta)G_2+G_3 & 0 \\ \beta G_2 & -\beta G_2 & G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3.2. Anàlisi nodal amb circuits amb fonts de tensió

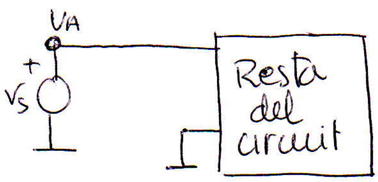
Fins ara hem vist com aplicar el mètode nodal si tenim circuits amb fonts de corrent. Ara veurem com ho podem fer si tenim fonts de tensió (controlades o independents, ja hem vist que s'analitzen igual). Veurem diferents casos segons com estan posades les fonts dins el circuit.

CAS 1: suposem que la font de tensió té una resistència en sèrie. Podrem fer transformació de fonts i analitzar-lo com fins ara:



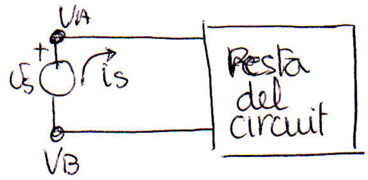
Analitzaríem aquest circuit com abans.

CAS 2: Suposem que la font de tensió està sola entre un node i massa. No té resistència en sèrie



Com que $V_A = V_S$ ja és conegut, no caldrà que plantegem equació en aquest node, i analitzem la resta com abans.

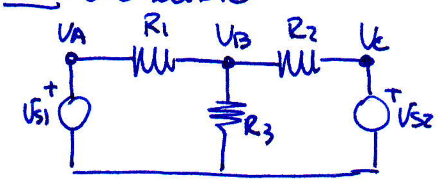
CAS 3: Suposem que la font de tensió està sola entre dos nodes (cap d'ells és massa) i sense resistència en sèrie.



Tractarem inicialment la font de tensió com si fos de corrent, amb valor i_S. Tindrem ara una variable més, però també tindrem una equació més: $V_S = V_A - V_B$

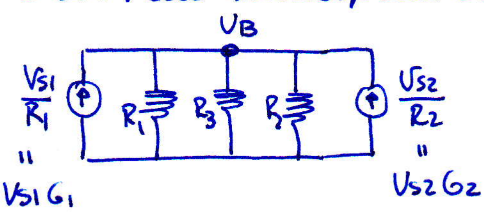
Anem a veure alguns exemples on apareguin aquests 3 casos.

Ex: 5.8 llibre



Aquest el podríem resoldre de dues maneres, segons el CAS 1 o el CAS 2. Fem-ho de les dues:

CAS 1: Fem transformació



Només tenim una equació:

$$(G_1+G_2+G_3)V_B = G_1 V_{S1} + G_2 V_{S2}$$

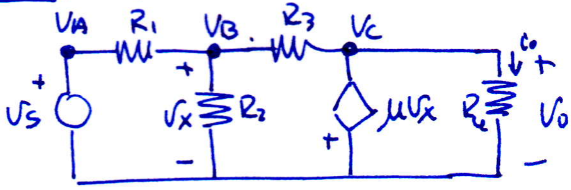
$$V_B = \frac{G_1 V_{S1} + G_2 V_{S2}}{G_1+G_2+G_3} = \frac{R_2R_3V_{S1} + R_1R_3V_{S2}}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

CAS 2: Com que tenim les fonts entre un node i massa, també ho podem fer segons el cas 2.
Plantegem equació només al node B:

$$-G_1V_A + (G_1+G_2+G_3)V_B - G_2V_C = 0 \qquad V_A = V_{S1}\ ,\ V_B = V_{S2}$$

$$V_B = \frac{G_1\cancel{V}_{S1} + G_2V_{S2}}{G_1+G_2+G_3}$$ Veiem que ens dona el mateix.

Ex: 5.9 llibre



Veiem que tenim dues fonts de tensió. La primera és independent i està entre un node i massa. Tot i que té una resistència en sèrie, i ho podríem tractar com el cas 1, ho tractarem com el cas 2.
Tenim una altre font de tensió, però aquesta és controlada. La tractarem com una d'independent, al principi. Com que està entre un node i massa, i no té resistència en sèrie, l'haurem de tractar forçosament com el cas 2.
Representa doncs, que només hem de plantejar una equació al node B. Després ja posarem la font controlada en funció de les tensions nodals.

$V_A = V_S$

$V_C = -\mu V_x$. Com que $V_x = V_B$, $V_C = -\mu V_B$

Plantegem ara l'equació a B:

$$-G_1V_A + (G_1+G_2+G_3)V_B - G_3V_C = 0$$

Posem els valors a V_A i V_C i passem les dades al segon membre.

$$(G_1+G_2+G_3)V_B + G_3\mu V_B = G_1V_S$$

$$(G_1+G_2+G_3(1+\mu))V_B = G_1V_S \Rightarrow V_B = \frac{G_1}{G_1+G_2+G_3(1+\mu)}V_S$$

De fet el què ens interessa és trobar v_0 i i_0, així que ara fem:

$$V_0 = V_C = -\mu V_B \Rightarrow V_0 = \frac{-\mu G_1}{G_1+G_2+G_3(1+\mu)}V_S$$

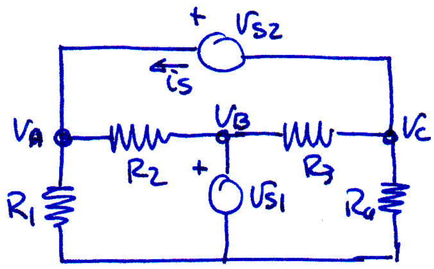
$$i_0 = G_4V_0 \Rightarrow i_0 = \frac{-\mu G_1G_4}{G_1+G_2+G_3(1+\mu)}V_S$$

Ens ha sortit negatiu degut al signe de la font controlada.
Si ara ens interessés, podríem trobar l'expressió amb R's.

$$V_0 = \frac{-\mu R_2R_3R_4}{R_2R_3R_4 + R_1R_3R_4 + R_1R_2R_4(1+\mu)}V_S = \frac{-\mu R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2(1+\mu)}V_S$$

$$i_0 = \frac{-\mu R_2R_3}{R_2R_3R_4 + R_1R_3R_4 + R_1R_2R_4(1+\mu)}V_S$$

Ex: 5.10 llibre



La font V_{S1} només la podem tractar com el cas 2.
La font V_{S2}, només la podrem tractar com el cas 3.

Considerarem de moment V_{S2} com si fos una font de corrent i_S. Al node B, no li plantejarem equació, ja que és una tensió coneguda.

$$\left.\begin{aligned}(G_1+G_2)V_A - G_2V_B &= i_S \\ -G_3V_B + (G_3+G_4)V_C &= -i_S\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}(G_1+G_2)V_A - i_S &= G_2V_{S1} \\ (G_3+G_4)V_C + i_S &= G_3V_{S1}\end{aligned}$$

Tenim la i_S, que no coneixem i no ens interessa. Fem-la desaparèixer sumant les dues equacions i plantegem una altra equació, que ens farà falta ja que tenim 2 incògnites i només una equació.

$$(G_1+G_2)V_A + (G_3+G_4)V_C = (G_2+G_3)V_{S1}$$

$$V_A - V_C = V_{S2}$$

Ara ho podem posar en forma matricial i resoldre:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & G_3+G_4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_2+G_3)V_{S1} \\ V_{S2} \end{bmatrix}$$

Trobem V_A i V_C:

$$V_A = \frac{\begin{vmatrix} (G_2+G_3)V_{S1} & G_3+G_4 \\ V_{S2} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & G_3+G_4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-(G_2+G_3)V_{S1} - (G_3+G_4)V_{S2}}{-G_1-G_2-G_3-G_4} = \frac{(G_2+G_3)V_{S1}+(G_3+G_4)V_{S2}}{G_1+G_2+G_3+G_4}$$

$$V_C = \frac{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & (G_2+G_3)V_{S1} \\ 1 & V_{S2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & G_3+G_4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(G_1+G_2)V_{S2} - (G_2+G_3)V_{S1}}{-G_1-G_2-G_3-G_4} = \frac{(G_2+G_3)V_{S1} - (G_1+G_2)V_{S2}}{G_1+G_2+G_3+G_4}$$

4.3.3. Anàlisi nodal amb circuits amb A.O's

Per utilitzar l'anàlisi nodal amb A.O. haurem de tenir en compte alguns aspectes:

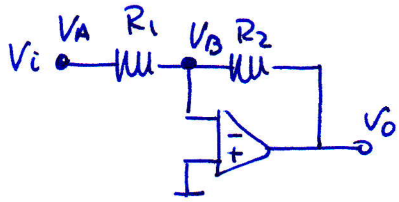
→ marcarem tots els nodes, però tindrem en compte que la sortida de l'AO té una font controlada. Així, als nodes que siguin sortida de l'AO no li plantejarem equació.

→ Haurem de tenir en compte que es forma el c.c. virtual, i per tant, $v_p = v_n$.

→ Caldrà tenir en compte també, al plantejar KCL's, que $i_p = i_n = 0$.

Tenint en compte això, i aplicant el mateix que hem vist fins ara, veiem alguns exemples.

Ex: 5.11 llibre (amplificador inversor)



Ja el coneixem i ja l'hem analitzat, però començem per un circuit senzill.
$V_A = V_i$ conegut, no plantegem equació
$V_B = 0$ ho imposarem després.
V_o font controlada, no plantegem equació.

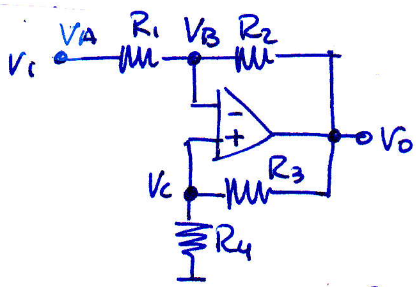
Així doncs plantegem només equació al node B.

$$-G_1 \underset{V_i}{\underset{\shortparallel}{V_A}} + (G_1+G_2)\underset{0}{\underset{\shortparallel}{V_B}} - G_2 V_o = 0$$

$$-G_1 V_i - G_2 V_o = 0 \Rightarrow V_o = -\frac{G_1}{G_2} V_o \Rightarrow V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_i$$

Que ja és el valor que sabíem.

Ex: 5.12 llibre



Hem vist un circuit similar a la col·lecció de problemes. Cal veure primer sota quines restriccions treballa en Z.L.

Per $V_i = 0$

$$V_n = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_o \qquad v_p = \frac{R_4}{R_3+R_4} v_o$$

Si $v = v_{sat} \to v_p > v_n \to$ volem que no es compleixi:

$$v_n > v_p \to \frac{R_1}{R_1+R_2} > \frac{R_4}{R_3+R_4} \Rightarrow R_1(R_3+R_4) > R_4(R_1+R_2)$$

$$R_1 R_3 > R_2 R_4 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} > \frac{R_4}{R_3}$$

Amb aquestes condicions faríem:

$v_A = v_i$ coneguda: no equació

$V_B = V_C$ ho imposarem després

V_o font controlada. No plantegem equació.

Plantegem equacions a B i C.

$$\left.\begin{array}{l} -G_1 \overset{V_i}{\overset{\shortparallel}{V_A}} + (G_1+G_2)V_B - G_2 V_o = 0 \\ (G_3+G_4)\underset{\underset{V_B}{\shortparallel}}{V_C} - G_3 V_o = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (G_1+G_2)V_B - G_2 V_o = G_1 V_i \\ (G_3+G_4)V_B - G_3 V_o = 0 \end{array}$$

Resolem i busquem V_o per Cramer.

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & G_1 V_i \\ G_3+G_4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ G_3+G_4 & -G_3 \end{vmatrix}} = \frac{-G_1(G_3+G_4)V_i}{-G_1G_3 - \cancel{G_2G_3} + \cancel{G_2G_3} + G_2G_4}$$

$$V_o = \frac{G_1G_3 + G_1G_4}{G_1G_3 - G_2G_4} V_i = \frac{R_2R_4 + R_2R_3}{R_2R_4 - R_1R_3} V_i$$

Si ens haguéssim volgut estalviar una equació, podríem haver buscat V_C (que és fàcil) i no plantejar equació al node C.

$$V_C = \frac{R_4}{R_3+R_4} V_o = \frac{G_3}{G_3+G_4} V_o$$

Ara plantegem només equació al node B.

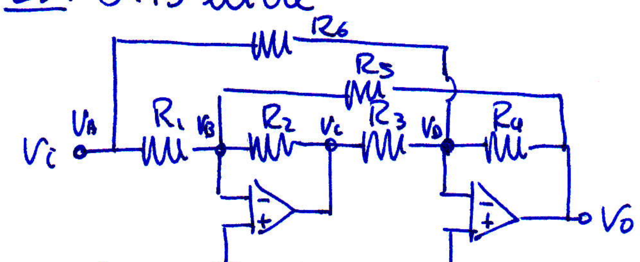
$$-G_1 \underset{\underset{V_i}{\shortparallel}}{V_A} + (G_1+G_2)\underset{\underset{V_C}{\shortparallel}}{V_B} - G_2 V_o = 0$$

$$\frac{(G_1+G_2)\cdot G_3}{G_3+G_4} \cdot V_o - G_2 V_o = G_1 V_i \rightarrow \frac{G_1G_3 + \cancel{G_2G_3} - \cancel{G_2G_3} - G_2G_4}{G_3+G_4} V_o = G_1 V_i$$

$$V_o = \frac{G_1G_3 + G_1G_4}{G_1G_3 - G_2G_4} V_i$$

Veiem que dóna el mateix, i es fa més ràpid.

<u>Ex</u>: 5.13 llibre



Veiem aquest exemple amb 2 AO.

A V_C i V_o no plantegem equació

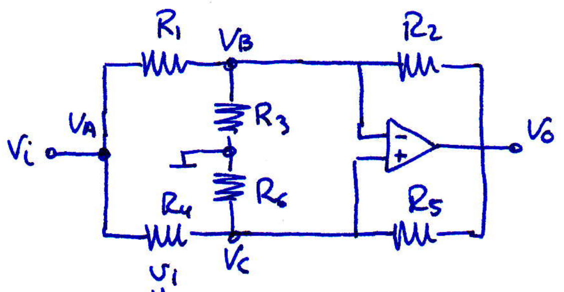
$V_A = V_i$

Després imposem $V_B = 0$ i $V_D = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -G_1 \overset{V_i}{\overset{\shortparallel}{V_A}} + (G_1+G_2+G_5)\overset{0}{\overset{\shortparallel}{V_B}} - G_2 V_C - G_5 V_o = 0 \\ -G_6 \underset{\underset{V_i}{\shortparallel}}{V_A} - G_3 V_C + (G_3+G_4+G_6)\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{V_D} - G_4 V_o = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} G_2 V_C + G_5 V_o = -G_1 V_i \\ G_3 V_C + G_4 V_o = -G_6 V_i \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} G_2 & G_5 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_1 V_i \\ -G_6 V_i \end{bmatrix} \qquad V_o = \frac{\begin{vmatrix} G_2 & -G_1 V_i \\ G_3 & -G_6 V_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_2 & G_5 \\ G_3 & G_4 \end{vmatrix}} = \frac{G_1G_3 - G_2G_6}{G_2G_4 - G_3G_5} V_c$$

Ex: 5.1.6 llibre.



Hem de trobar V_o.

$V_A = V_i$

$V_B = V_c$

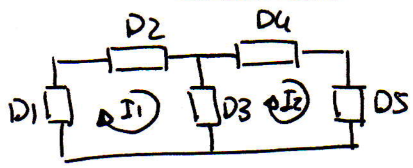
A V_o no plantegem equació i V_A tampoc.
Plantegem a B i C.

$$\left.\begin{aligned} -G_1 \underset{V_i}{\underset{\parallel}{V_A}} + (G_1+G_2+G_3)V_B - G_2 V_o = 0 \\ -G_4 \underset{V_i}{\underset{\parallel}{V_A}} + (G_4+G_5+G_6)\underset{V_B}{\underset{\parallel}{V_c}} - G_5 V_o = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} (G_1+G_2+G_3)V_B - G_2 V_o = G_1 V_i \\ (G_4+G_5+G_6)V_B - G_5 V_o = G_4 V_i \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ G_4+G_5+G_6 & -G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_B \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 V_i \\ G_4 V_i \end{bmatrix}$$

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} G_1+G_2+G_3 & G_1 V_i \\ G_4+G_5+G_6 & G_4 V_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_2 \\ G_4+G_5+G_6 & -G_5 \end{vmatrix}} = \frac{G_4(G_1+G_2+G_3) - G_1(G_4+G_5+G_6)}{G_2(G_4+G_5+G_6) - G_5(G_1+G_2+G_3)} V_i = \frac{G_4(G_2+G_3) - G_1(G_5+G_6)}{G_2(G_4+G_6) - G_5(G_1+G_3)} V_i$$

4.4. MÈTODE DELS CORRENTS DE MALLA



En un circuit d'aquest estil, on hi ha més nodes que malles, serà millor utilitzar els corrents de malla enlloc deles tensions nodals com a variables generadores.

Per aquest mètode, cal tenir en compte algunes particularitats:

→ Definició de malla: camí tancat que no n'inclou cap més al seu interior.

→ Corrent de malla: Tal com veiem en el circuit de mostra, agafarem el corrent de malla en sentit horari. Veiem però que aquesta variable és fictícia, ja que realment no passa el mateix corrent per tots els elements de la malla. Malgrat tot el considerarem així perquè ens facilita l'anàlisi.

→ A partir d'aquests corrents podrem trobar la resta de variables:

A D1 i D2 $\quad i = I_1$

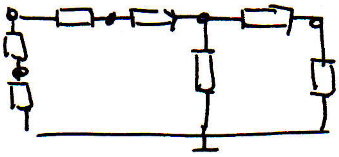
A D3 $\quad i = I_1 - I_2$

A D4 i D5 $\quad i = I_2$

Coneguts aquests corrents, podrem trobar les tensions a partir de les característiques dels elements.

→ En un circuit amb E elements i N nodes tindrem E-N+1 malles.

→ Aquest mètode serà indicat per circuits amb molts nodes i poques malles. Habitualment quan hi hagi molts elements en sèrie.



$E = 7$

$N = 6$ (5 equacions amb mètode nodal)

$E-N+1 = 2$ malles (2 equacions amb anàlisi de malles).

Veiem ara quins passos cal seguir per plantejar les equacions necessàries:

→ Assignar corrents a cada malla

→ Assignar tensions a cada element

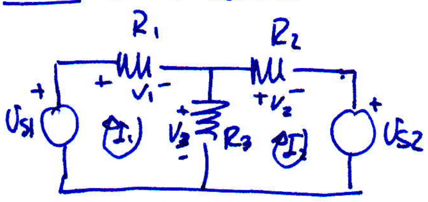
→ Plantejar KVL a cada malla (en total a E-N+1).

→ Utilitzar les condicions als elements per expressar les tensions en funció dels corrents de malla.

→ Resoldre el sistema de E-N+1 equacions i E-N+1 incògnites.

Vegem-ho amb un exemple que ja vam analitzar amb el mètode nodal:

Ex: 5.14 llibre



Plantegem els KVL:

$v_1 + v_3 = v_{S1}$

$v_2 - v_3 = -v_{S2}$

Condicions als elements:

v_{S1} i v_{S2} conegudes, $v_1 = I_1 \cdot R_1$, $v_2 = I_2 R_2$, $v_3 = (I_1 - I_2) R_3$

Posem aquestes condicions als KVL:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_3 = v_{S1} \\ I_2 R_2 - (I_1 - I_2) R_3 = -v_{S2} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} (R_1 + R_3) I_1 - R_3 I_2 = v_{S1} \\ -R_3 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 = -v_{S2} \end{array}$$

Si ho posem en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{S1} \\ -v_{S2} \end{bmatrix}$$

Podem resoldre-ho i buscar I_1 i I_2:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} v_{s1} & -R_3 \\ -v_{s2} & R_2+R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2+R_3 \end{vmatrix}} = \frac{(R_2+R_3)v_{s1} - R_3 v_{s2}}{(R_1+R_3)(R_2+R_3) - R_3^2} = \frac{(R_2+R_3)v_{s1} - R_3 v_{s2}}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_3 & v_{s1} \\ -R_3 & -v_{s2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2+R_3 \end{vmatrix}} = \frac{R_3 v_{s1} - (R_1+R_3) v_{s2}}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Si ara voléssim trobar les tensions, utilitzaríem les condicions als elements.

$$v_1 = I_1 R_2 \quad , \quad v_2 = I_2 R_2 \quad , \quad v_3 = (I_1 - I_2) R_3$$

Veiem, igual que pel mètode nodal, si podem generalitzar i plantejar les equacions directament:

→ En la diagonal positiva, tenim la suma de resistències que estan a la malla.

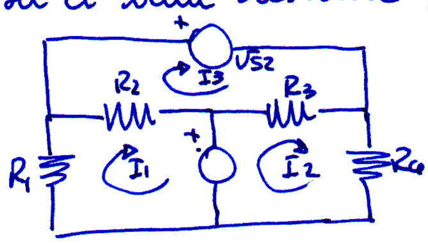
→ La resta d'elements són les resistències que comparteixen malles amb signe negatiu.

→ Al segon membre hi ha les fonts de tensió que estan a la malla (positives si la intensitat surt del + i negatives si surt del −).

Veiem un altre exemple i mirem de plantejar les equacions directament.

Ex: 5.15 llibre

Ja el vam resoldre pel mètode nodal.



Plantegem directament la matriu segons els criteris que hem trobat abans

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & 0 & -R_2 \\ 0 & R_3+R_4 & -R_3 \\ -R_2 & -R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{s1} \\ v_{s1} \\ -v_{s2} \end{bmatrix}$$

Busquem I_2 per trobar després v_o

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -v_{S1} & -R_2 \\ 0 & v_{S1} & -R_3 \\ -R_2 & -v_{S2} & R_2+R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & 0 & -R_2 \\ 0 & R_3+R_4 & -R_3 \\ -R_2 & -R_3 & R_2+R_3 \end{vmatrix}} = \frac{(R_1+R_2)(R_2+R_3)v_{S1} - R_2R_3v_{S1} - R_2^2 v_{S1} - R_3(R_1+R_2)v_{S2}}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)(R_2+R_3) - R_2^2(R_3+R_4) - R_3^2(R_1+R_2)}$$

$$I_2 = \frac{R_1(R_2+R_3)v_{S1} - R_3(R_1+R_2)v_{S2}}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}$$

Si volíssim trobar v_0 faríem:

$$v_0 = I_2 \cdot R_4 \Rightarrow v_0 = \frac{R_1R_4(R_2+R_3)v_{S1} - R_3R_4(R_1+R_2)v_{S2}}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}$$

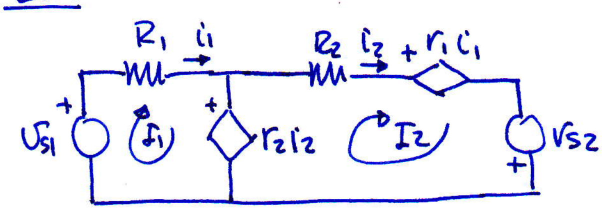
Ja vam resoldre aquest circuit per anàlisi nodal. Vam trobar el resultat amb G's. Si el passem a R's, veurem que ens dóna el mateix.

4.4.1. Anàlisi de malles amb circuits amb fonts controlades de tensió

Farem el mateix que vam fer amb l'anàlisi nodal i les fonts controlades d'intensitat. Tractarem inicialment les fonts controlades de tensió com si fossin independents, i posteriorment les posarem en funció dels corrents de malla. Un cop reordenada l'equació, ja podem resoldre. Això ens farà perdre la simetria de la matriu.

Veiem algun exemple concret per veure com va:

Ex:



Tenim dues malles i, per tant, dues equacions.
Plantegem les equacions directament:

$$R_1 I_1 - 0\, I_2 = v_{S1} - r_2 i_2$$
$$-0\, I_1 + R_2 I_2 = r_2 i_2 - r_1 i_1 + v_{S2}$$

Tenint en compte que:

$i_1 = I_1$ i $i_2 = I_2$

Posem aquests valors a les equacions i reordenem:

$$\left.\begin{array}{l} R_1 I_1 + r_2 I_2 = v_{s1} \\ r_1 I_1 + (R_2 - r_2) I_2 = v_{s2} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} R_1 & r_2 \\ r_1 & R_2-r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \end{bmatrix}$$

Busquem I_1 i I_2:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} v_{s1} & r_2 \\ v_{s2} & R_2-r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & r_2 \\ r_1 & R_2-r_2 \end{vmatrix}} = \frac{(R_2-r_2)v_{s1} - r_2 v_{s2}}{R_1(R_2-r_2) - r_1 r_2}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & v_{s1} \\ r_1 & v_{s2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & r_2 \\ r_1 & R_2-r_2 \end{vmatrix}} = \frac{R_1 v_{s2} - r_1 v_{s1}}{R_1(R_2-r_2) - r_1 r_2}$$

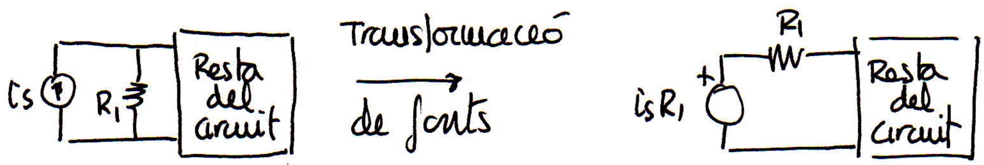
4.4.2. Anàlisi de malles en circuits amb fonts d'intensitat

Veurem que quan introduïm fonts d'intensitat a l'anàlisi de malles, ens trobarem amb diversos casos, tal com passava amb les fonts de tensió en l'anàlisi nodal.

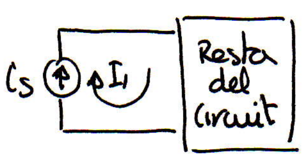
Veurem 3 casos diferents:

CAS 1: Font d'intensitat amb una resistència en paral·lel

Podem fer transformació de fonts i tindrem una font de tensió i una sola malla.



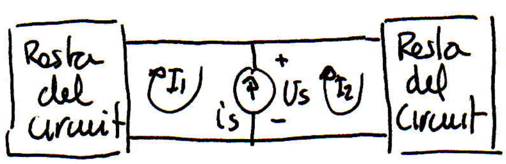
CAS 2: Font d'intensitat atravessada per un sol corrent de malla.



$i_s = I_1$

Aquest corrent de malla ja és conegut, així que no plantejarem equació en aquesta malla. Després passarem i_s al segon membre.

CAS 3: Font d'intensitat atravessada per dos corrents de malla.



$i_s = I_2 - I_1$

No sabem cap corrent de malla.

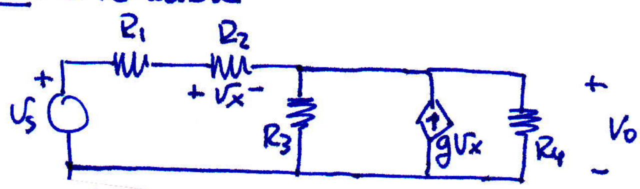
Farem com si fos una font de tensió

Tindrem una variable més i una equació més.

Tractarem primer com si fossin independents les fonts controlades i després ja les posarem en funció dels corrents de malla.

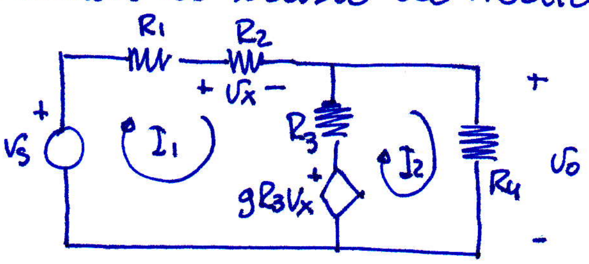
Veiem alguns exemples:

<u>Ex</u>: 5.16 llibre



Fem transformació de fonts a la font controlada: CAS 1.

Fem la transformació amb R_3, perquè sobre R_4 podrem calcular la tensió de sortida.



Plantegem 2 equacions:

$$(R_1+R_2+R_3)\,I_1 - R_3 I_2 = V_S - g R_3 V_x$$
$$-R_3 I_1 + (R_3+R_4)\,I_2 = g R_3 V_x$$

Posem V_x en funció dels corrents de malla:

$$V_x = I_1 \cdot R_2 \quad \Rightarrow \quad g R_3 V_x = g R_2 R_3 I_1$$

Ho posem a les equacions:

$$\left.\begin{array}{l} (R_1+R_2+R_3+g R_2 R_3)\,I_1 - R_3 I_2 = V_S \\ -(R_3+g R_2 R_3)\,I_1 + (R_3+R_4)\,I_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{bmatrix} R_1+R_2+R_3+g R_2 R_3 & -R_3 \\ -(R_3+g R_2 R_3) & R_3+R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

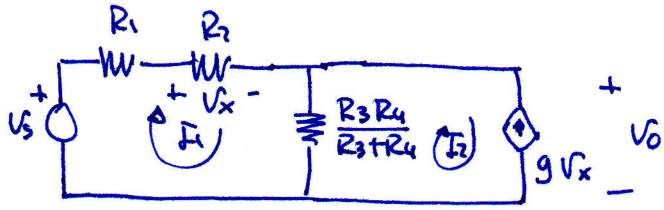
Volem trobar V_o, per tant buscarem I_2, ja que $V_o = I_2 \cdot R_4$

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_2+R_3+g R_2 R_3 & V_S \\ -(R_3+g R_2 R_3) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2+R_3+g R_2 R_3 & -R_3 \\ -(R_3+g R_2 R_3) & R_3+R_4 \end{vmatrix}} \cdot R_4 = \frac{R_4 (R_3 + g R_2 R_3)\, V_S}{(R_1+R_2+R_3+g R_2 R_3)(R_3+R_4) - R_3 (R_3 + g R_2 R_3)}$$

$$V_o = \frac{R_3 R_4 + g R_2 R_3 R_4}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_3 R_4 + g R_2 R_3 R_4} V_S$$

Aquest mateix exercici, el podríem fer pel cas 2. Fem el paral·lel de R_3 i R_4 i deixem la font sola, de manera que només passi un corrent de malla per la font.

Aleshores el circuit quedaria:



Plantegem només equació a la malla 1, perquè $I_2 = -gV_x$ és conegut.

$$\left(R_1+R_2+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right)I_1 - \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}I_2 = V_S \qquad \text{si } I_2 = -g\cdot R_2\cdot I_1$$

$$\frac{R_1R_3+R_1R_4+R_2R_3+R_2R_4+R_3R_4}{R_3+R_4}I_1 + \frac{gR_2R_3R_4}{R_3+R_4}I_1 = V_S$$

$$I_1 = \frac{R_3+R_4}{R_1R_3+R_1R_4+R_2R_3+R_2R_4+R_3R_4+gR_2R_3R_4}V_S$$

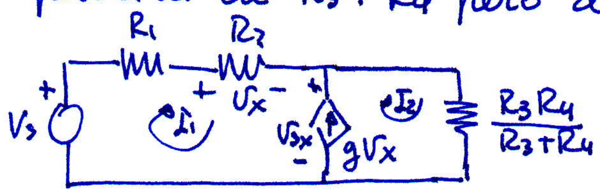
Per buscar V_0:

$$V_0 = (I_1 - I_2)\cdot\frac{R_3R_4}{R_3+R_4} \qquad I_2 = -gR_2I_1$$

$$V_0 = \frac{R_3R_4+gR_2R_3R_4}{R_3+R_4}I_1$$

Posant ara el seu valor a I_1, veiem que ja ens sortiria el mateix que abans.

Podem resoldre aquest mateix circuit pel cas 3 si fem el paral·lel de R_3 i R_4 però deixem la font al mig.



Tractem de moment la font com si fos de tensió i plantegem equacions a les dues malles.

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_2)I_1 &= V_S - V_{SX}\\ \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}I_2 &= V_{SX}\end{aligned}\right\}$$

sumem per fer desaparèixer V_{SX}:

$$(R_1+R_2)I_1 + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}I_2 = V_S$$

Ara afegim una equació més:

$$I_2 - I_1 = gV_x = gR_2I_1 \rightarrow -(1+gR_2)I_1 + I_2 = 0$$

Ho deixaríem així si ho volem resoldre. També ho podríem resoldre per substitució:

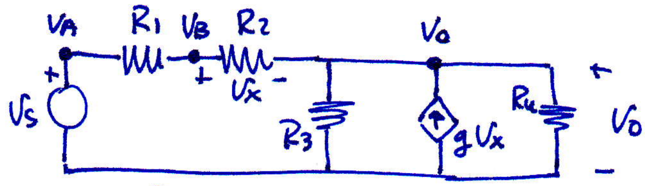
$$I_2 = (1+gR_2)I_1$$

Ho posem a l'equació

$$(R_1+R_2)I_1 + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}(1+gR_2)I_1 = V_S$$

A partir d'aquí resoldríem, trobaríem I_1, després I_2 i $V_0 = I_2\cdot\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}$

I encara, el mateix circuit, el podríem resoldre pel mètode nodal



$V_A = V_s$ no plantegem equació

$V_x = V_B - V_o$

$$-G_1 \underset{V_s}{V_A} + (G_1+G_2)V_B - G_2 V_o = 0$$

$$-G_2 V_B + (G_2+G_3+G_4)V_o = g \underset{\hookrightarrow V_B - V_o}{V_x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (G_1+G_2)V_B - G_2 V_o = G_1 V_s \\ -(G_2+g)V_B + (G_2+G_3+G_4+g)V_o = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -(G_2+g) & G_2+G_3+G_4+g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_B \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 V_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & G_1 V_s \\ -(G_2+g) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -(G_2+g) & G_2+G_3+G_4+g \end{vmatrix}} = \frac{G_1(G_2+g)V_s}{(G_1+G_2)(G_2+G_3+G_4+g) - G_2(G_2+g)}$$

$$V_o = \frac{G_1(G_2+g)V_s}{G_1G_2+G_1G_3+G_1G_4+G_1g+G_2G_3+G_2G_4}$$

Si ho voleu posar en funció de les resistències tindríem:

$$V_o = \frac{R_3R_4 + R_2R_3R_4g}{R_1R_3+R_1R_4+R_2R_3+R_2R_4+R_3R_4+R_2R_3R_4g} V_s$$