TEMA 2: ANÀLISI ELEMENTAL DE CIRCUITS

2.1. INTRODUCCIÓ

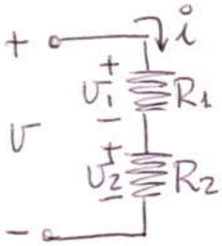
L'objectiu d'aquest tema és simplificar, mitjançant l'utilització d'eines, l'anàlisi de circuits lineals (no depenen de la freqüència).
D'una banda serà més simple si no intentem buscar totes les variables, sinó que només calculem les que ens interessin.
La resta de simplificació la farem, habitualment, substituint una part complexa del circuit, per una d'equivalent que sigui molt més senzilla.

2.2. CONNEXIÓ SÈRIE I PARAL·LEL. BIPOLS EQUIVALENTS.

Veurem què passa, en aquest apartat, quan tenim resistències i fonts en sèrie o paral·lel. Deixarem per més endavant les bobines i els condensadors.
Hem de tenir en compte primer, que un bipol equivalent és un altre que té la mateixa característica i-v en els seus terminals.

2.2.1. Connexió sèrie de resistències

Suposem un circuit amb dues resistències connectades en sèrie:



En aquest cas, la intensitat que passa per les dues resistències és la mateixa, així que:

$v_1 = i \cdot R_1$

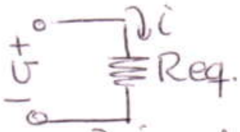
$v_2 = i \cdot R_2$

Fent un KVL tenim:

$v = v_1 + v_2 = i \cdot R_1 + i \cdot R_2 = i \cdot (R_1 + R_2) = i \cdot Req$

$Req = R_1 + R_2$

El bipol equivalent serà:

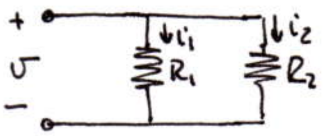


Si tinguéssim n resistències en sèrie, la resistència equivalent seria: $Req = \sum_n R_n$

Ens podem trobar amb els següents casos particulars:

2.2.2. Connexió paral·lel de resistències

Suposem un circuit amb dues resistències connectades en paral·lel:



La tensió és la mateixa a les dues resistències.

$v = i_1 \cdot R_1 \Rightarrow i_1 = v \cdot G_1$

$v = i_2 \cdot R_2 \Rightarrow i_2 = v \cdot G_2$

Fent un KCL tenim:

$$i = i_1 + i_2 = v \cdot G_1 + v \cdot G_2 = v \cdot (G_1 + G_2) = v \cdot G_{eq} \Rightarrow G_{eq} = G_1 + G_2$$

Veiem que és dual a les resistències en sèrie. En sèrie és la suma de resistències i en paral·lel és la suma de conductàncies, i serà així també si hi ha més resistències en paral·lel.

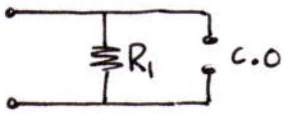
Si volem veure què passa amb els valors de les resistències;

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

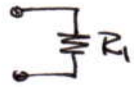
Aquesta relació amb resistències, només és vàlida per dues, si en tenim més:

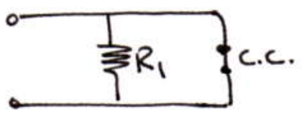
$$G_{eq} = \sum_n G_n \rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \sum_n \frac{1}{R_n}$$

Ens podem trobar amb els següents casos particulars:

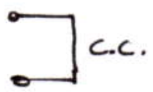


$R_{c.o} = \infty \rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{R_1} \Rightarrow R_{eq} = R_1$





$R_{c.c.} = 0 \rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 \cdot 0}{R_1 + 0} = 0 \Rightarrow R_{eq} = 0$



2.2.3. Resistència equivalent. Bipol equivalent

Hem vist que al tenir resistències en sèrie o en paral·lel, podem trobar fàcilment la seva resistència equivalent.

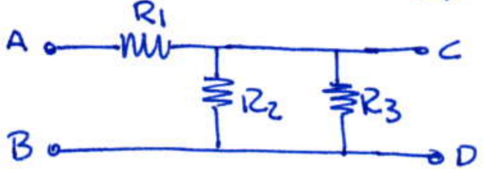
Quan tinguem més resistències, algunes en sèrie, algunes en paral·lel, o ni l'una cosa ni l'altre, també podrem trobar una resistència equivalent, (de fet serà en general, un bipol equivalent).

Moltes vegades es pot fer avant fent associacions sèrie i paral·lel, però si es complica, sempre podem suposar que posem una tensió als terminals del bipol i busquem el corrent, la relació v/i serà la resistència equivalent.

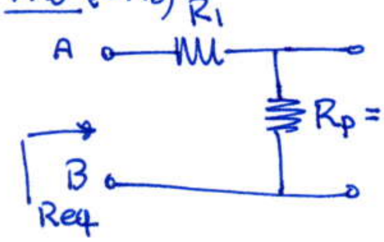
Si per una de les resistències no hi circula corrent, vol dir que no aporta res al circuit, i la podem descartar.

Ex.: 2.11 llibre

Pel següent circuit, trobar la resistència equivalent entre els terminals AB(=AD), CD(=CB), AC i BD



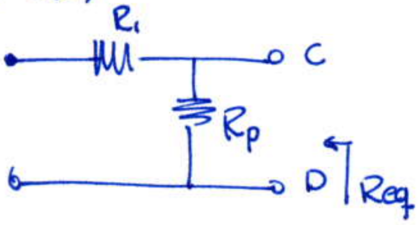
AB (=AD)



$R_p = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3}$

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3}$$

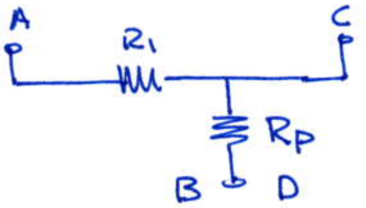
CD(=CB)



Per R_1 no passa corrent, per tant no cal considerar-la:

$$R_{eq} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3}$$

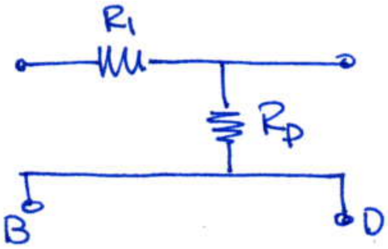
AC



Pel paral·lel de R_2 i R_3 no passa corrent, per no cal considerar-la:

$$R_{eq} = R_1$$

BD:

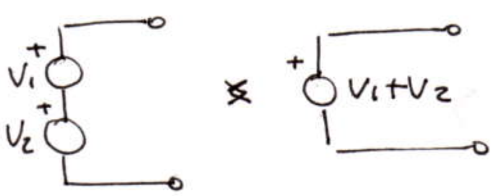


Per R_1 i per R_p no passa corrent, per tant no cal considerar-la:

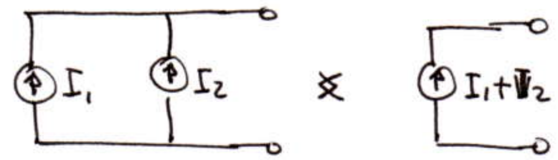
$$R_{eq} = 0$$

2.2.4. Connexions sèrie i paral·lel entre fonts

Ens podem trobar diferents casos de fonts de tensió o corrent en sèrie o paral·lel (o amb resistències també). Anem a estudiar en cada cas què passa, i quin és el dipol equivalent:

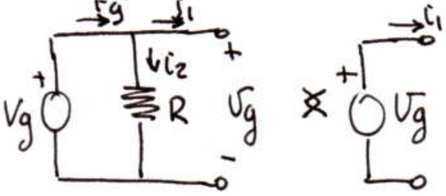


Seria incoherent tenir dos fonts d'intensitat en sèrie, ja que totes dues voldrien imposar el seu corrent, i per una malla només n'hi pot circular un, per tant mai tindrem aquesta situació.

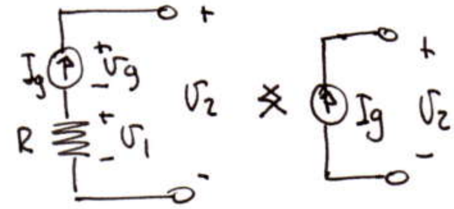


Pel mateix motiu seria incoherent tenir dos fonts de tensió en paral·lel.

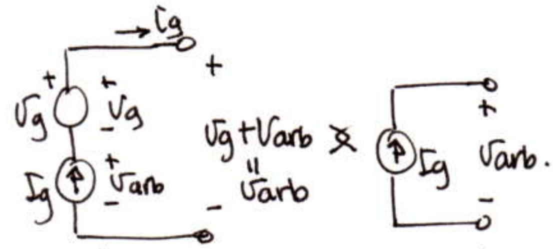
Veurem també que, a vegades, alguns elements posats en sèrie o en paral·lel amb fonts, són supèrfluos (no fan res i es poden treure). Vegem-ne alguns casos:



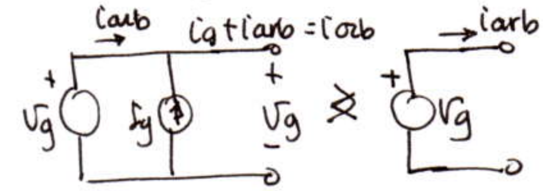
Els dos bipols no són iguals, però són equivalents. La tensió i el corrent a la sortida, seran els mateixos. Com que el corrent de la font és arbitrari, podrà donar i_1 enlloc de i_g si el circuit ho demana. R supèrflua.



Pel mateix raonament que abans, la R serà supèrflua. La font de corrent (on la tensió és la que demana el circuit), ens podrà donar v_2 enlloc de v_g.



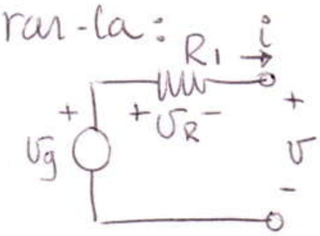
Com que la tensió a la sortida serà arbitrària, i en canvi el corrent ha de ser i_g, mana la font d'intensitat. I la de tensió serà supèrflua.

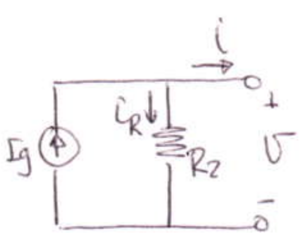


Pel mateix motiu que abans, ara s'imposa la font de tensió, perquè a la sortida hi ha v_g i un corrent arbitrari que donarà la font de tensió.

2.3. TRANSFORMACIÓ DE FONTS. BIPOLS EQUIVALENTS.

Agafarem els models reals dels generadors (o fonts) de tensió i corrent i buscarem la seva característica i-v per comparar-la:





$$\left.\begin{aligned} v_g &= v_R + v \\ v_R &= i \cdot R_1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} v_g &= i \cdot R_1 + v \\ i &= \frac{v_g - v}{R_1} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} i_g &= i_R + i \\ i_R &= \frac{v}{R_2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} i_g &= \frac{v}{R_2} + i \\ i &= i_g - \frac{v}{R_2} \end{aligned}$$

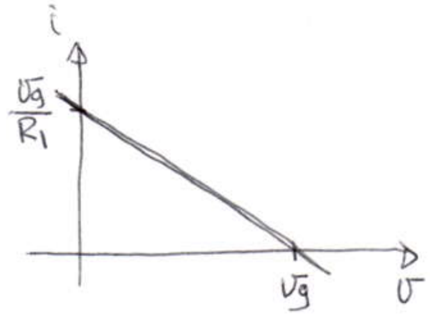
Busquem els punts de tall pels dos casos, i dibuixem la característica i-v corresponent a cada cas:

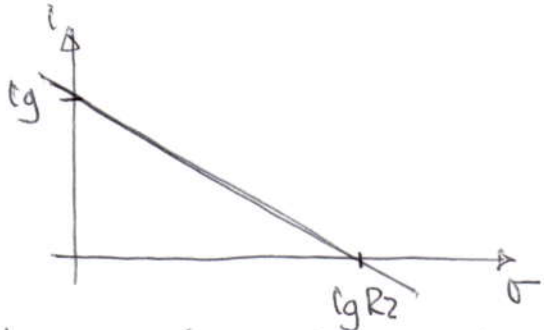
Si $v=0 \Rightarrow i=\frac{v_g}{R_1}$

Si $i=0 \Rightarrow v=v_g$

Si $v=0 \Rightarrow i=i_g$

Si $i=0 \Rightarrow v=i_g \cdot R_2$





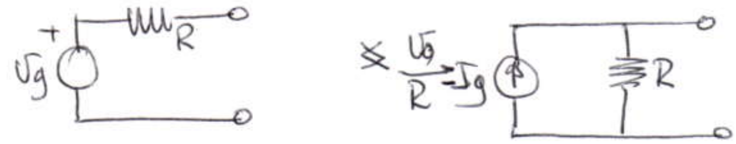
Veiem que les dues característiques són molt semblants, i les podríem fer iguals si imposem que:

$R_1 = R_2 = R$

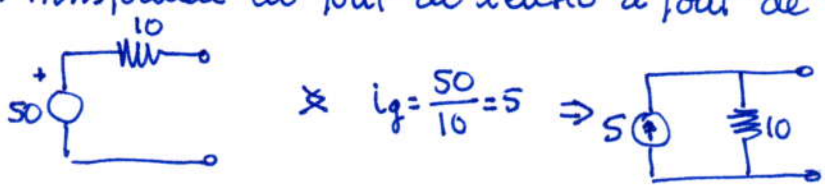
$v_g = i_g \cdot R$

Si es compleixen aquestes condicions, podríem dir que els dos circuits són equivalents, ja que tenen la mateixa característica i-v en els seus terminals, i si fem mesures al connectar-hi un circuit, aquestes serien idèntiques. Malgrat tot, els dos circuits no són iguals, ja que si els deixem en circuit obert, per la font de tensió no hi circula corrent, però per la de corrent sí, i per tant, aquesta dissipa energia.

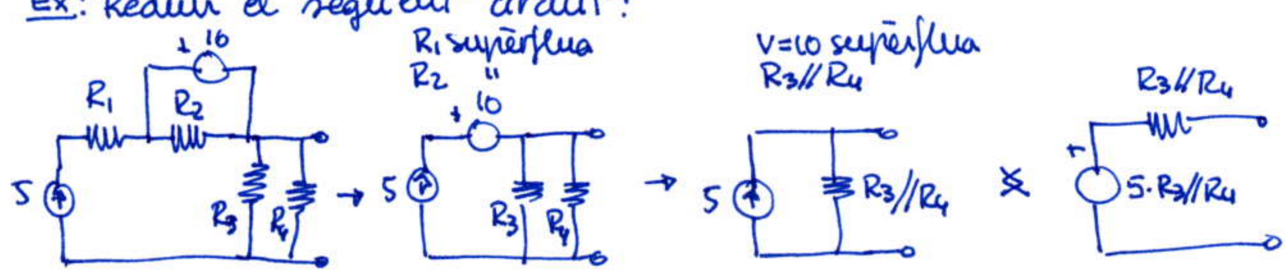
Els circuits equivalents no són imprescindibles, però sovint són molt útils, ja que a vegades ens ajuden a reduir els circuits. Així, quan ens interessi, podrem canviar una font de tensió per una de corrent i també a l'inrevés.



Ex: Transformar la font de tensió a font de corrent.



Ex: Reduir el següent circuit:

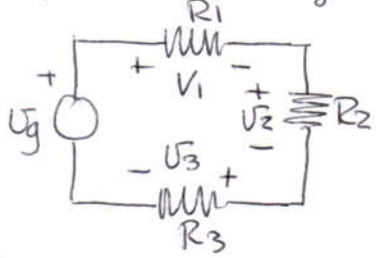


2.4. DIVISORS DE TENSIÓ I DE CORRENT

Els divisors de tensió i de corrent són eines que simplifiquen l'anàlisi i les utilitzarem molt. Cal recordar-los i utilitzar-los quan es pugui.

2.4.1. Divisor de tensió

Suposem el següent circuit:



Tots els elements estan en sèrie, per la qual cosa el corrent serà el mateix a tota la malla.

$$i_1 = i_2 = i_3 = i$$

$$v_1 = R_1 \cdot i \quad , \quad v_2 = R_2 \cdot i \quad , \quad v_3 = R_3 \cdot i$$

Suposem que volem trobar la tensió v_2, per exemple. Plantejaríem primer un KVL a la malla:

$$v_g = v_1 + v_2 + v_3$$

Utilitzant les equacions dels elements tindríem:

$$v_g = R_1 \cdot i + R_2 i + R_3 i \Rightarrow i = \frac{v_g}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Ara que ja tenim el corrent, podem trobar v_2:

$$v_2 = R_2 \cdot i = v_g \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

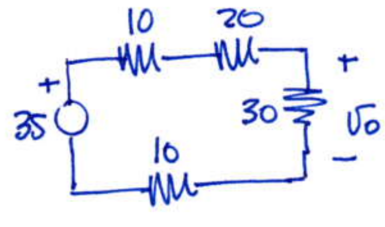
Anàlogament podríem trobar les altres tensions:

$$v_1 = v_g \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad , \quad v_3 = v_g \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Veiem doncs, que donada aquesta situació, amb resistències que estan en sèrie (és a dir, per totes passa el mateix corrent), per trobar la tensió a cadascuna, simplement haurem de multiplicar v_g per la resistència en qüestió i dividir-ho per la suma de totes les resistències de la malla. És pot veure fàcilment que la suma de les tensions a totes les resistències ens donarà v_g.

Ex: 2.13 llibre

Trobar v_o en el següent circuit, aplicant divisor de tensió.

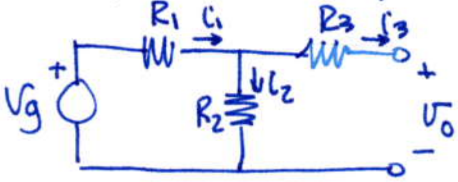


$$v_o = 35 \frac{30}{10+20+30+10} = \frac{35 \cdot 30}{70}$$

$$\boxed{v_o = 15}$$

Ex: 2.14 llibre

Pel següent circuit, trobar la tensió a la sortida.



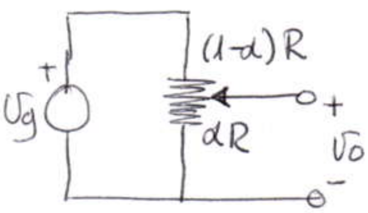
Com que la sortida està en circuit obert, per R_3 no passa corrent i $i_3=0$. En aquest cas, $i_1=i_2$, hi passa el mateix corrent i estan en sèrie, per tant es pot aplicar el divisor de tensió.

$$v_0 = v_g \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

El potenciòmetre: cas particular del divisor de tensió

El potenciòmetre o resistència variable és un dispositiu de 3 potes que, girant un botó, se li pot fer variar la seva resistència. Per tant, connectat a un circuit, pot fer variar una tensió.

El connectarem a una font de tensió, i quedarà de la següent manera:



Es pot veure com si tinguéssim dues resistències separades de valors αR i $(1-\alpha)R$. Veiem que sumades valen R, i que cada part variarà en funció de α.

Per trobar v_0 podrem aplicar el divisor de tensió sempre que estigui en c.o. (passarà el mateix corrent per les dues parts del potenciòmetre.

$$v_0 = v_g \frac{\alpha R}{(1-\alpha)R+\alpha R} = v_g \frac{\alpha \cancel{R}}{\cancel{R}} = \alpha v_g$$

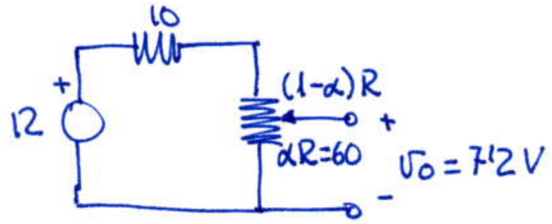
Veiem doncs que la tensió variarà en funció de la posició del cursor.

Si $\alpha=1 \Rightarrow v_0=v_g$ (estem utilitzant tota la resistència)
Si $\alpha=0 \Rightarrow v_0=0$ (no estem utilitzant res de resistència)
Si $\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow v_0=\frac{v_g}{2}$ (tenim el cursor just a la meitat).

Aquests dispositius es fan servir, per exemple, per ajustar la tensió d'una font, o el volum d'una ràdio.

Ex:

Donat el següent circuit, trobar de quin valor ha de ser el potenciòmetre i en quina posició l'hem de posar (α), per tal de tenir 7'2 V a la sortida.



$$7'2 = 12 \frac{60}{10+(1-\alpha)R+60}$$

$$70+(1-\alpha)R = \frac{12\cdot 60}{7'2} = 100$$

$$(1-\alpha)R = 30$$

Sabent també que $\alpha R = 60 \Rightarrow R = \frac{60}{\alpha}$

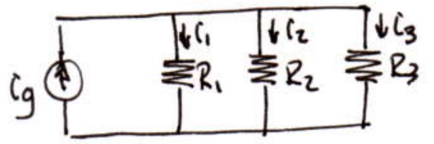
$$\frac{60}{\alpha}(1-\alpha) = 30 \Rightarrow \frac{60}{\alpha} - 60 = 30 \Rightarrow \frac{60}{\alpha} = 90 \Rightarrow \alpha = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

$$R = \frac{60}{\frac{2}{3}} = 90 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} R = 90 \\ \alpha = 2/3 \end{matrix}}$$

2.4.2. Divisor d'intensitat

El divisor d'intensitat serà el cas dual al divisor de tensió. Es donarà quan hi hagi una intensitat que entra a un node, i tinguem diverses resistències en paral·lel (a totes hi cau la mateixa tensió).

Suposarem el següent cas:



Fent un KCL tindrem:

$$i_g = i_1 + i_2 + i_3$$

Per la llei d'Ohm:

$$i_g = v\cdot G_1 + v\cdot G_2 + v\cdot G_3 \Rightarrow v = \frac{i_g}{G_1+G_2+G_3}$$

Si ara volem trobar les intensitats farem:

$$i_1 = v\cdot G_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2+G_3}\cdot i_g$$

$$i_2 = v\cdot G_2 = \frac{G_2}{G_1+G_2+G_3}\cdot i_g$$

$$i_3 = v\cdot G_3 = \frac{G_3}{G_1+G_2+G_3}\cdot i_g$$

Veiem que cal multiplicar la intensitat de la font per la conductància del corrent que ens interessa, i dividir-ho per la suma de totes les conductàncies.

Com que normalment no treballem amb conductàncies, ho podem passar a resistències de dues maneres:

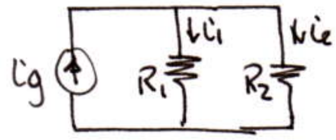
- Substituir les G's per $1/R$
- Multiplicar numerador i denominador per totes les R's (va millor això, les G's s'anulen amb la seva R, i la resta d'R's es queda i no cal fer gaires operacions).

Passem a R's només la i_1 per veure com va:

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2+G_3} i_g = \frac{\cancel{G_1} \cdot \cancel{R_1} \cdot R_2 \cdot R_3}{\cancel{G_1}\cancel{R_1}R_2R_3 + \cancel{G_2}R_1\cancel{R_2}R_3 + \cancel{G_3}R_1R_2\cancel{R_3}} i_g$$

$$i_1 = \frac{R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2} i_g$$

En moltes ocasions ens trobarem dues resistències en paral·lel. Verem si en aquest cas, podem trobar una norma per poder treballar directament amb resistències.



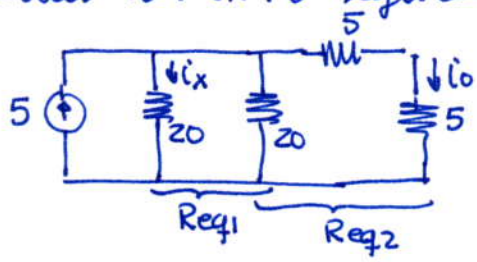
$$i_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2} \cdot i_g = \frac{\cancel{G_1} \cdot \cancel{R_1} \cdot R_2}{\cancel{G_1}\cancel{R_1}R_2 + \cancel{G_2}R_1\cancel{R_2}} i_g = \frac{R_2}{R_1+R_2} i_g.$$

Si només tenim dues resistències, podrem fer la R que no hi passa el corrent que busquem per la i_g, dividit per la suma de les resistències.

Si tenim més resistències, podem fer-ho amb G's, o fer el paral·lel de les R's per les quals no passa el corrent que busquem.

Ex: 2.16 llibre

Trobar i_0 i i_x al següent circuit:



Busquem primer les dues resistències equivalents, per utilitzar-les quan sigui necessari.

$$R_{eq1} = \frac{20 \cdot 20}{40} = 10 \qquad R_{eq2} = \frac{20 \cdot 10}{30} = \frac{20}{3}$$

Per trobar i_0 utilitzarem R_{eq1}:

$$i_0 = \frac{5 \cdot R_{eq1}}{10 + R_{eq1}} = \frac{5 \cdot 10}{10+10} \Rightarrow \boxed{i_0 = 2'5}$$

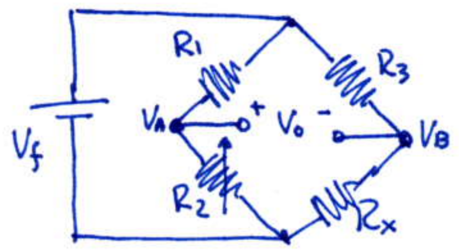
Per trobar i_x, utilitzarem R_{eq2}:

$$i_x = \frac{5 \cdot R_{eq2}}{20 + R_{eq2}} = \frac{5 \cdot \frac{20}{3}}{20 + \frac{20}{3}} = \frac{5 \cdot 20}{60+20} = \frac{100}{80} \Rightarrow \boxed{i_x = 1'25}$$

Fent un KCL, si ens interessés, podríem trobar fàcilment la intensitat que passa per l'altra resistència de 20. A més, ja no caldria fer res, ja que si hi cau la mateixa tensió que a l'altre, la intensitat haurà de ser la mateixa.

$$5 = i_x + i_{20} + i_0 \rightarrow 5 = 1'25 + i_{20} + 2'5 \Rightarrow i_{20} = 1'25$$

Ex: Pont de Wheatstone



Aquest circuit es sol utilitzar per mesurar resistències, com farem en aquest cas amb R_x.
També s'hi poden posar sensors, i utilitzar-lo per mesurar temperatures.

Si R_1, R_2 i R_3 són conegudes, fent $V_0=0$ es pot trobar R_x en funció de les altres. R_2 acostuma a ser variable, per poder ajustar $V_0=0$.
Si V_0 està en c.o, no hi passa corrent, per R_1 i R_2 i passa el mateix corrent i es pot fer un divisor de tensió (igual per R_3 i R_x).

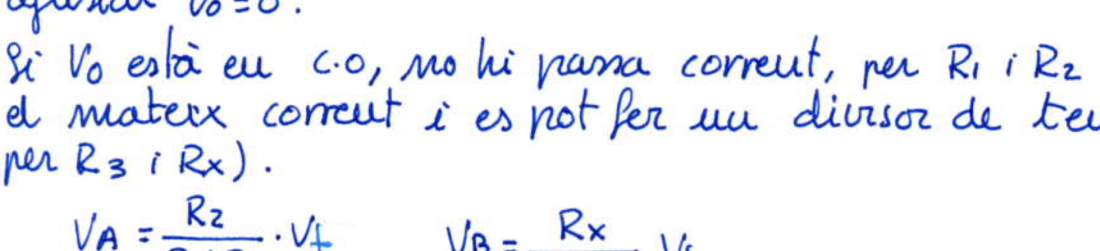
$$V_A = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot V_f \qquad V_B = \frac{R_x}{R_3+R_x} V_f$$

$$V_0 = V_A - V_B = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_x}{R_3+R_x}\right)V_f \qquad \text{si } V_0=0 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_x}{R_3+R_x}$$

$$R_2R_3 + \cancel{R_2R_x} = R_1R_x + \cancel{R_2R_x} \rightarrow R_2R_3 = R_1R_x \Rightarrow \boxed{R_x = \frac{R_2R_3}{R_1}}$$

Ex: 2.18 llibre

Donat el circuit següent, trobar v_0 i i_g utilitzant el divisor de tensió:



$$\underbrace{\frac{2R\cdot R}{2R+R}}= \frac{2R^2}{3R} = \frac{2R}{3}$$

Ara podem trobar v_0 fent un divisor de tensió:

$$v_0 = \frac{2R/3}{R+\frac{2R}{3}}\cdot v_g = \frac{2R}{3R+2R}\cdot v_g = \frac{2R}{5R}\cdot v_g \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{2}{5}v_g}$$

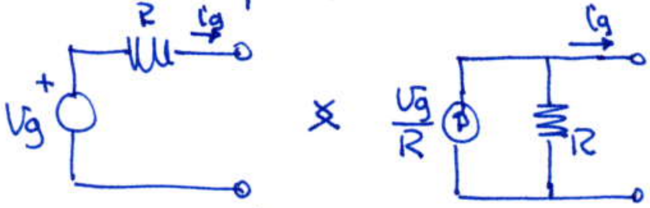
Podem trobar i_g de dues maneres:

A partir de v_g → $i_g = \frac{v_g}{R+\frac{2R}{3}} = \frac{3v_g}{5R} \rightarrow \boxed{i_g = \frac{3v_g}{5R}}$
(R i $\frac{2R}{3}$ estan en sèrie)

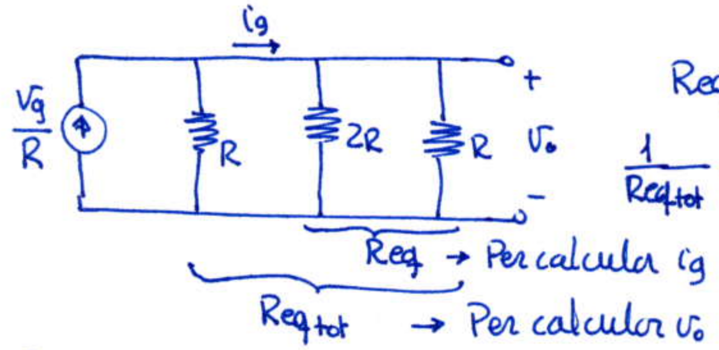
A partir de v_0 → $i_g = \frac{v_0}{\frac{2R}{3}} = \frac{2/5\, v_g}{2R/3} = \frac{3v_g}{5R}$

Ex: R.19 llibre

Pel circuit anterior, fer els mateixos càlculs, però fent transformació de fonts.



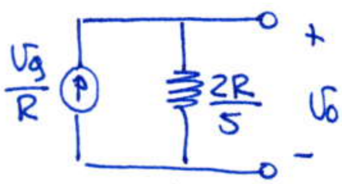
Afegirem ara la resta de circuit a la font transformada.



$$Req = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2R}{3}$$

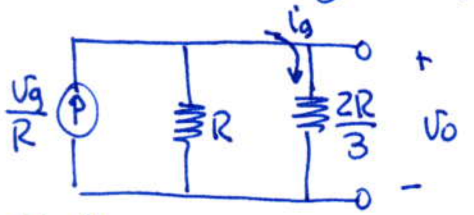
$$\frac{1}{Req_{tot}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{2+1+2}{2R} = \frac{5}{2R} \Rightarrow Req_{tot} = \frac{2R}{5}$$

Per calcular v_o:



$$V_o = \frac{V_g}{\cancel{R}} \cdot \frac{2\cancel{R}}{5} = \frac{2V_g}{5} \Rightarrow \boxed{V_o = \frac{2V_g}{5}}$$

Per calcular i_g, ho podem fer de dues maneres:



A partir de V_o: $V_o = i_g \cdot \frac{2R}{3} \rightarrow i_g = \frac{2V_g}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{2}R}$

$$\boxed{i_g = \frac{3V_g}{5R}}$$

Fent un divisor d'intensitat:

$$i_g = \frac{\cancel{R}}{R + \frac{2R}{3}} \cdot \frac{V_g}{\cancel{R}} = \frac{3V_g}{5R}$$

Veiem que tot ens dóna igual que fent-ho de l'altra manera.

2.5. TEOREMES DE CIRCUITS LINEALS

Quan treballem amb funcions lineals, sabem que es compleixen dues propietats:

- Homogeneïtat: $f(Ax) = A \cdot f(x)$
- Additivitat: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Podem apropiar-les pels circuits lineals, tot i que les anomenarem diferent: Proporcionalitat i superposició.

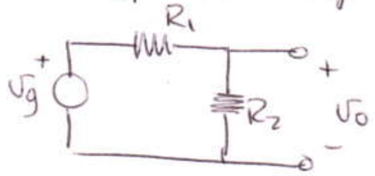
2.5.1. Proporcionalitat

Aquest teorema ens diu que la sortida d'un circuit lineal és proporcional a l'entrada.

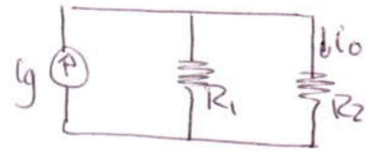
$y = Kx$ on K és ct.
Y és i o v
X és i o v

En un circuit linial només seran lineals la i i la v, no la P.

Veiem algun circuit d'exemple. De moment això serà vàlid quan tinguem una sola font.

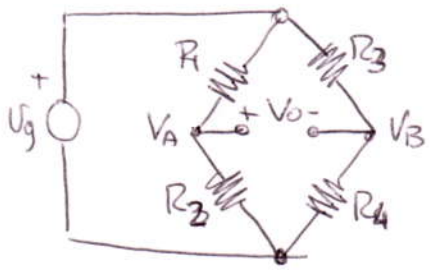


$v_0 = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_g$ y és v_0, x és v_g K és $\frac{R_2}{R_1+R_2}$



$i_0 = \frac{R_1}{R_1+R_2} i_g$ y és i_0, x és i_g K és $\frac{R_1}{R_1+R_2}$

La ct. ens permetrà sempre trobar la sortida per qualsevol entrada $\begin{matrix}10 \to 3\\ 5 \to 1'5\end{matrix}$



En l'exercici que hem fet abans, amb el pont de Wheatstone:

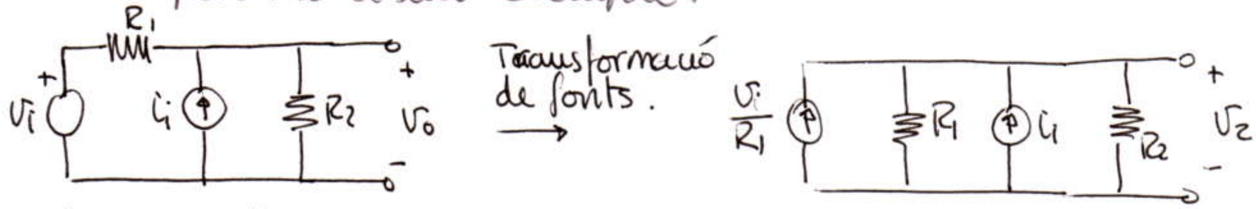
$v_A = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_g$ $v_B = \frac{R_4}{R_3+R_4} v_g$

$$\underset{y}{v_0} = V_A - v_B = \underbrace{\left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right)}_{ct.} \underset{x}{v_g}$$

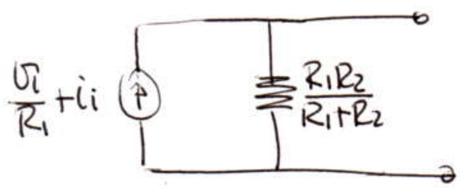
2.5.2. Superposició

Aquest teorema ens diu que la sortida deguda a dues o més entrades, es pot trobar sumant les sortides que provoquen cada entrada per separat.

Aquesta propietat serà molt utilitzada. Comprovem que és certa partint d'un exemple.



Fent els paral·lels trobem:



La sortida serà:

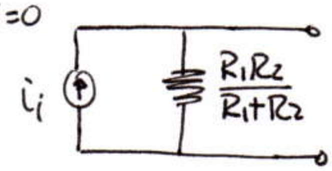
$$v_0 = \left(\frac{v_i}{R_1} + i_i\right) \cdot \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$v_0 = v_i \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} + i_i \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

Sembla que és cert que hi ha una constant per cada font.
Recordant la definició de la propietat ens diu que la sortida es pot trobar sumant les sortides que provoquen cada entrada per separat.
Provem doncs d'anular totes les entrades **menys una**, anem buscant les diferents sortides i després les sumem.

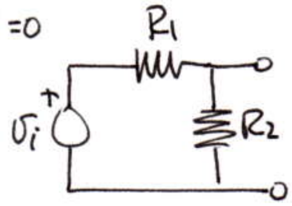
Recordem $v_i = 0 \Rightarrow$ c.c. , $i_i = 0 \Rightarrow$ c.o

$v_i = 0$



$v_{o1} = i_i \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$

$i_i = 0$



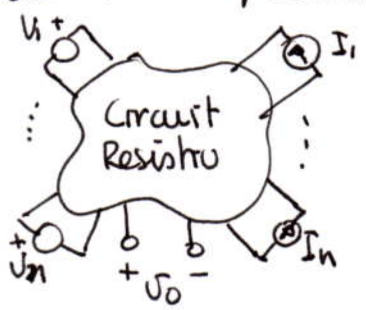
$v_{o2} = v_i \frac{R_2}{R_1+R_2}$

$v_o = v_{o1} + v_{o2}$

$v_o = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_i + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} i_i$

Veiem que ens dóna el mateix.

Generalitzant podem dir:



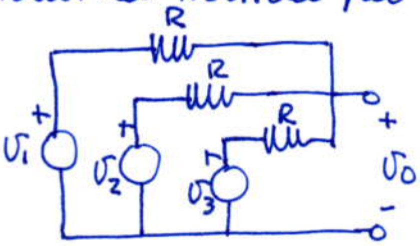
$v_o = \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_n V_n + \beta_1 I_1 + \cdots + \beta_n I_n$

On les constants són les respostes al circuit si desconnectem totes les fonts excepte aquella.

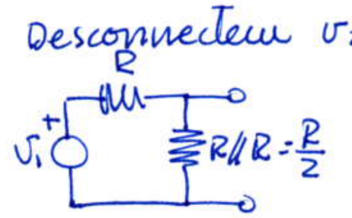
Per tant, els passos a seguir seran:
- → Desconnectar totes les fonts menys una i trobar la sortida.
- → Fer el mateix per totes les altres fonts
- → Sumar totes les respostes obtingudes per trobar la sortida

Ex: 3.4. llibre

Trobar la sortida pel següent circuit:



Desconnectem v_2 i v_3:



$v_{o1} = \frac{R/2}{R+\frac{R}{2}} \cdot v_i = \frac{1}{3} v_i$

Si desconnectem v_1 i v_3 tindrem el mateix circuit, per tant:

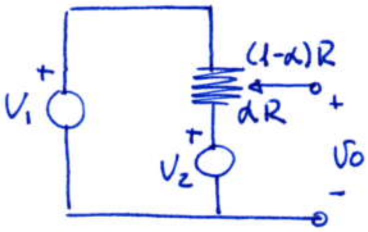
$v_{o2} = \frac{1}{3} v_2$

Igualment desconnectant v_1 i v_2: $v_{o3} = \frac{1}{3} v_3$

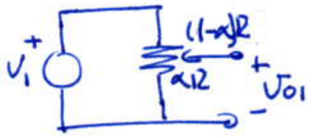
Sumant: $v = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3)$ Veiem que tenim un sumador.

Ex: El mesclador

La base d'un mesclador (com els d'una taula de música), és com el sumador anterior, però utilitzant un potenciòmetre que ens permeti barrejar els dos senyals:

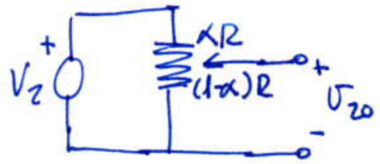


Si $v_2 = 0 \Rightarrow$



$$v_{01} = \frac{\alpha R}{R} \cdot V_1 = \alpha V_1$$

Si $v_1 = 0 \Rightarrow$



$$v_{02} = \frac{(1-\alpha)R}{R} V_2 = (1-\alpha) V_2$$

Sumant: $\boxed{v_0 = \alpha V_1 + (1-\alpha) V_2}$

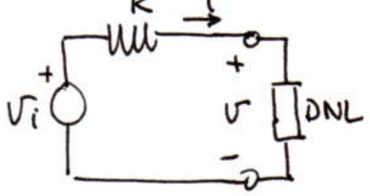
Veiem que variant la posició del potenciòmetre, podem variar la proporció de cada senyal en la barreja.

2.6. ANÀLISI DE CIRCUITS NO LINEALS. EL DIODE

Ja vam veure alguna cosa del LED (que és un cas particular del diode). Vam veure que hi havia diferents models, i que podíem agafar el més senzill.

En general, de qualsevol dispositiu no lineal (DNL), no sabrem la seva equació (o serà molt complicada). Si volem utilitzar el model més complexe, ho podrem analitzar gràficament. Si volem utilitzar el model més senzill, ens basarem amb la tensió llindar per fer l'anàlisi.

En aquesta assignatura utilitzarem bàsicament LED's. Cal tenir en compte que hi ha LED's de diversos colors diferents (groc, verd, vermell, ...) i també de diversos materials i tecnologies. Això fa que els diferents LED's tinguin tensions llindar diverses. Aquestes es donaran sempre quan n'utilitzem un.

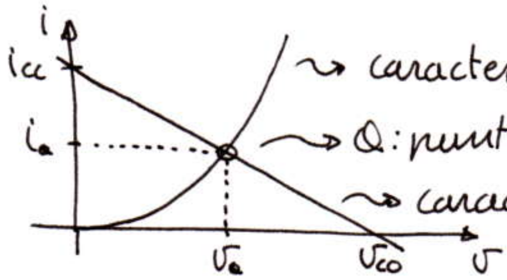


Si ho volem fer gràficament, buscarem primer la característica i-v del circuit, i la creuarem amb la corresponent al DNL.

$v_i = i \cdot R + v \Rightarrow i = \frac{v_i}{R} - \frac{v}{R}$

Els punts de tall són: $v = 0 \Rightarrow i_{cc} = \frac{v_I}{R}$

$i = 0 \Rightarrow v_{co} = v_i$



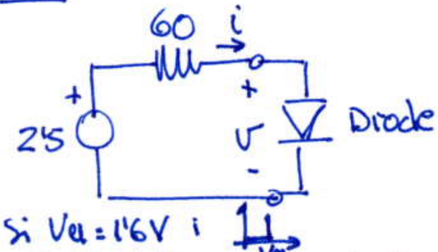
→ característica del DNL.

→ Q: punt de treball

→ característica del circuit

Així es podria trobar aproximadament la tensió i la intensitat del dispositiu no lineal.

Ex:



Si $V_Q = 1'6V$ i $\underset{V_Q}{\text{Diode}}$

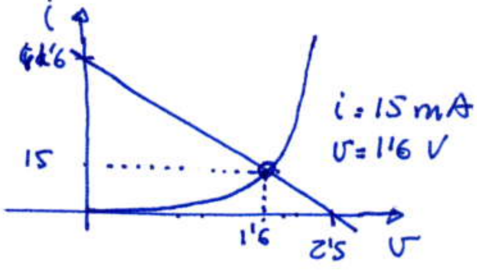
$2'5 = 60i + 1'6 \rightarrow i = 15mA$

$2'5 = 60 \cdot i + v$

$i = \frac{2'5 - v}{60}$

$i_{cc} = 41'6mA$

$v_{co} = 2'5V$



$i = 15mA$

$v = 1'6V$

Notem però que per poder fer aquest anàlisi, hem de ser capaços de reduir el circuit a una font i una resistència. Hem de veure com es pot fer això.

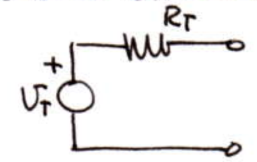
2.7. EQUIVALENTS THEVENIN I NORTON

Aquests equivalents ens permetran reduir un circuit complex a una font (real) i una càrrega. Per això haurem de tenir un circuit que puguem dividir en dues parts: una que podrem considerar la font, i una altre que podrem considerar la càrrega. La part considerada com a font, ha d'estar formada només per elements linials (fonts i resistències). En aquestes condicions, podrem trobar un circuit equivalent, que serà molt simple, i ens facilitarà l'anàlisi. Així, la càrrega podrà ser qualsevol. Si tenim un diode, el podrem deixar com a càrrega, transformar la resta de circuit, i així ja estaríem en la situació de l'apartat anterior.

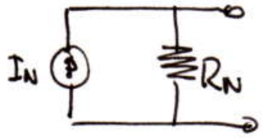
Sabem que un circuit linial ha de tenir una característica linial, així que mirarem d'igualar-la a la del circuit equivalent (font + resistència). Buscarem els punts de tall i mirarem què s'ha de complir perquè siguin equivalents.

Podem trobar dos circuits equivalents:

Thevenin :



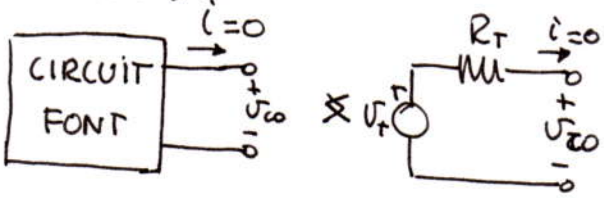
Norton :



Que a més, sabem que seran equivalents entre ells (per transformació de fonts) si es compleix que:

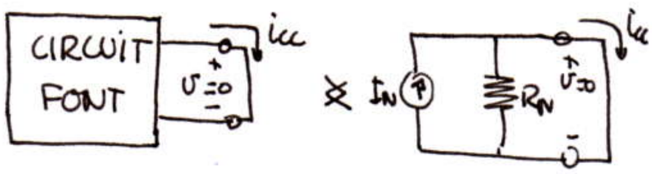
$$R_T = R_N = R$$
$$v_T = i_N \cdot R$$

Per trobar els valors de v_T, I_N i R, igualarem les dues característiques i-v. Veiem què passa pels punts de tall (c.c. i c.o).



Si els dos circuits són equivalents, han de donar la mateixa tensió en c.o, i aquesta és:

$$v_{co} = v_T$$



Igual que abans, si els dos circuits han de donar la mateixa intensitat en c.c, aquesta serà:

$$i_{cc} = I_N$$

Així, per trobar els equivalents es seguirà el següent mètode:

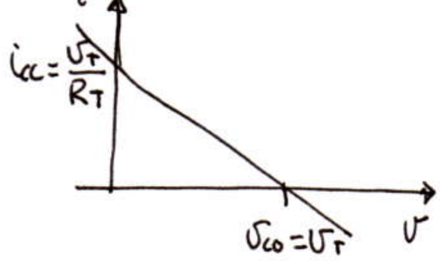
→ Trobar la tensió en circuit obert del circuit font, i aleshores trobarem la tensió de Thevenin: $v_T = v_{co}$

→ Trobar la intensitat en curtcircuit del circuit font, i aleshores trobarem la intensitat de Norton: $I_N = i_{cc}$

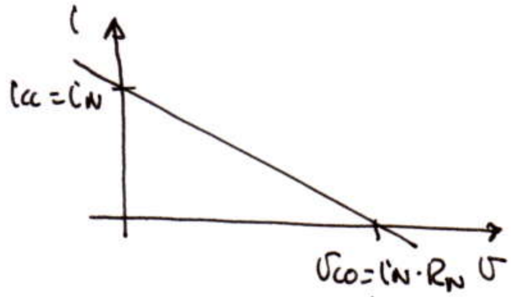
→ La resistència es podrà trobar:

$$R_T = R_N = R = \frac{v_{co}}{i_{cc}} = \frac{v_T}{I_N}$$

Amb això les característiques i-v dels dos equivalents seran:



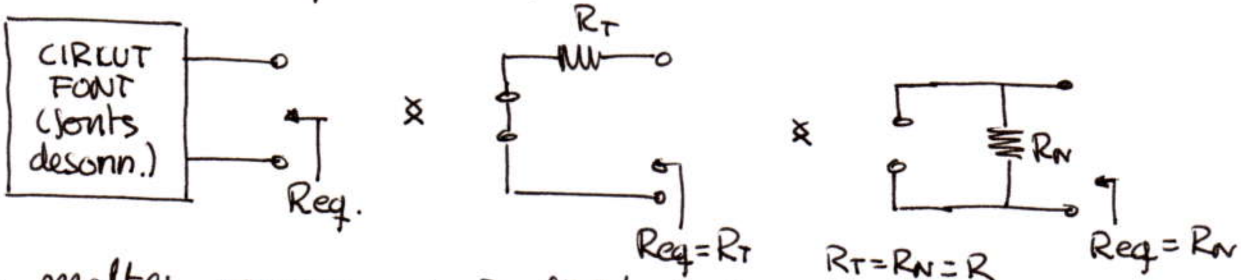
Equivalent Thevenin



Equivalent Norton

A vegades resulta més fàcil trobar la Resistència directament, i després trobar el corrent o la tensió a partir de l'altre variable i la resistència.

Fixem-nos què passa si desconnectem les fonts i busquem la resistència equivalent:



$R_T = R_N = R$

En moltes ocasions serà fàcil trobar aquesta resistència equivalent. Si trobem també v_{co}, a partir d'aquestes dues trobarem la i_{cc}:

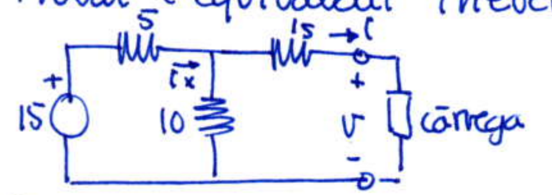
$$I_N = i_{cc} = \frac{v_{co}}{R} = \frac{v_T}{R}$$

Un cop trobat l'equivalent, el podrem posar en el lloc del circuit font. Després, al connectar-hi la càrrega, tindrem un circuit molt més senzill d'analitzar.

Per substituir al circuit font, tant hi podem posar l'equivalent Thevenin com el Norton, mirarem què ens facilita més l'anàlisi segons la càrrega.

Ex: 3.5. llibre

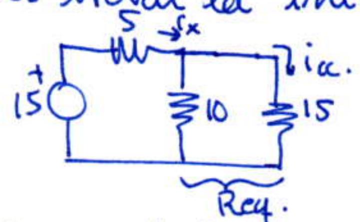
Trobar l'equivalent Thevenin i Norton del següent circuit.



Començem buscant la tensió en c.o.

$$v_{co} = \frac{10}{5+10} \cdot 15 = 10V$$

Per trobar la intensitat en c.c., buscarem primer i_x:



$$10 // 15 \Rightarrow Req = \frac{10 \cdot 15}{10+15} = \frac{150}{25} = 6\ \Omega$$

$$i_{x(cc)} = \frac{15}{6+5} = \frac{15}{11} = 1'36\ A.$$

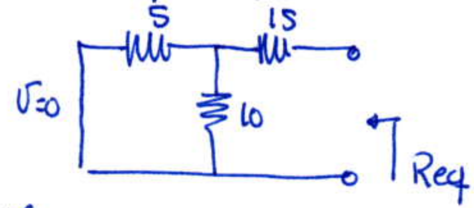
Un cop trobada i_x podem trobar i_{cc} fent un divisor d'intensitat.

$$i_{cc} = \frac{10}{10+15} \cdot i_x = \frac{13'6}{25} = 0'544\ A.$$

Ara, per trobar la resistència de Thevenin faríem:

$$R_T = \frac{v_{co}}{i_{cc}} = \frac{10V}{0'544} = 18'38\ \Omega$$

També haguéssim pogut trobar la R_T directament, desconnectant fonts, i buscant la R_{eq}.

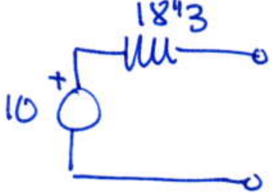


$5 // 10 \rightarrow \frac{5 \cdot 10}{15} = \frac{50}{15} = 3'3\,\Omega$

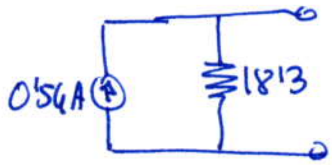
$R_{eq} = 15 + 3'3 = 18'3\,\Omega$

Veiem que ens dóna el mateix i ho hem trobat molt ràpid. En aquest cas hagués estat millor buscar primer v_T i R_T i, a partir d'ells, trobar i_{cc}.

Així, l'equivalent Thevenin seria:

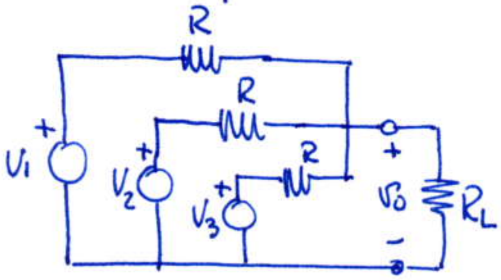


Per transformació de fonts el Norton seria $\longrightarrow$



Ex: 3.6. llibre

Trobar l'equivalent Thevenin i Norton del següent circuit i trobar v_0:

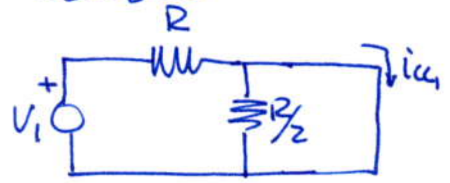


Recordem que ja vam analitzar aquest circuit quan estava en c.o. Ho vam fer per superposició i vam veure que era un sumador. Analitzar-ho així seria més complicat. Aprofitem el resultat per trobar l'equivalent Thevenin i el Norton.

$v_{co} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3) = v_T$

La intensitat en c.c. la podríem trobar també per superposició:

$v_2 = v_3 = 0$



$i_{cc_1} = \frac{V_1}{R}$

Seria el mateix per les altres fonts:

$i_{cc_2} = \frac{V_2}{R}$, $i_{cc_3} = \frac{V_3}{R}$

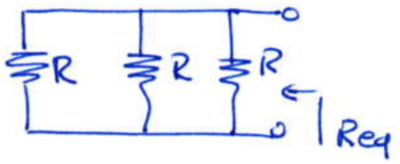
Així:

$$i_{cc} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{R}$$

La R_T la podríem trobar a partir de V_{co} i i_{cc}:

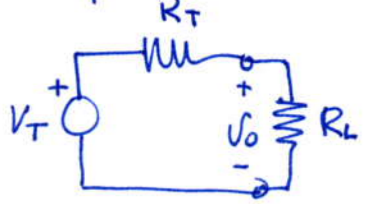
$$R_T = \frac{V_{co}}{i_{cc}} = \frac{1/3\,(V_1 + V_2 + V_3)}{1/R\,(V_1 + V_2 + V_3)} = \frac{R}{3}$$

També l'haguéssim pogut trobar directament, desconnectant fonts:



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{3}$$

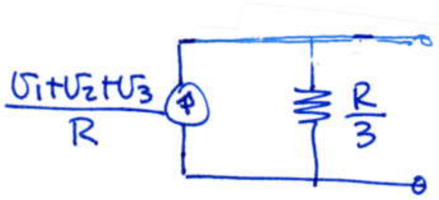
Ara que tenim l'equivalent, afegim la càrrega i trobem v_0:



$$v_0 = \frac{R_L}{R_T + R_L} \cdot v_T = \frac{R_L}{\frac{R}{3} + R_L} \cdot \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3)$$

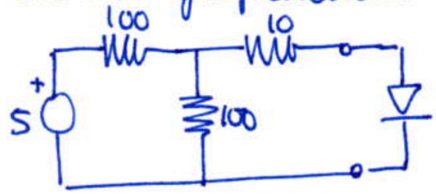
$$v_0 = \frac{R_L}{R + 3R_L} \cdot (v_1 + v_2 + v_3)$$

L'equivalent Norton seria:



Ex: 3.8. llibre

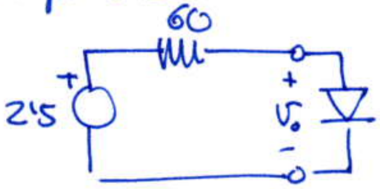
Resoldre gràficament el següent circuit:



$$v_{co} = \frac{100}{100+100} \cdot 5 = 2'5\,V$$

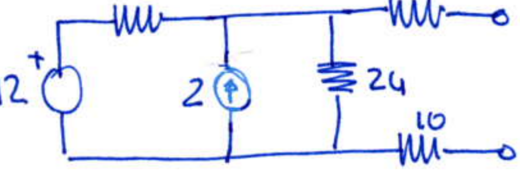
$$R_{eq} = 100 /\!/ 100 + 10 = 50 + 10 = 60\,\Omega$$

Per resoldre el circuit, anava bé simplificar-lo. Amb l'equivalent Thevenin, veiem que ens queda el mateix que ja vam resoldre.



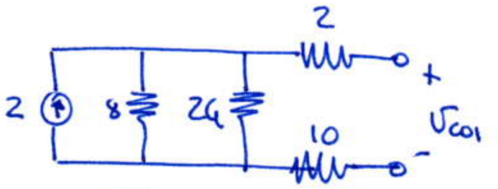
Ex: 3.3.6 llibre

Donat el següent circuit, trobar els equivalents Thevenin i Norton:



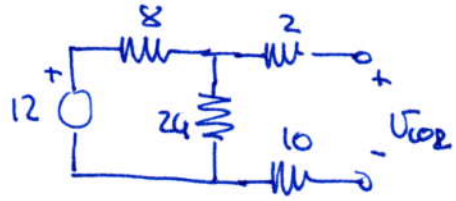
Ho podem resoldre per superposició. Anulem primer la font de tensió, i després la de corrent.

$v_f = 0 \Rightarrow$



$$v_{co1} = 2 \cdot \frac{8 \cdot 24}{8+24} = 2 \cdot 6 = 12V$$

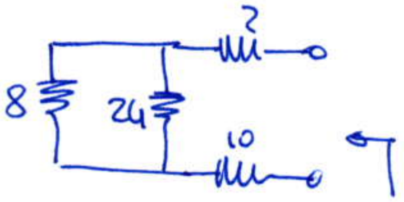
$i_f = 0 \Rightarrow$



$$v_{co2} = 12 \cdot \frac{24}{8+24} = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9V$$

$$v_{co} = 12V + 9V = 21V$$

Per buscar Req, desconnectem fonts:

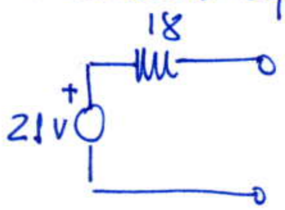


$$R_{eq} = 2 + 8 /\!/ 24 + 10$$

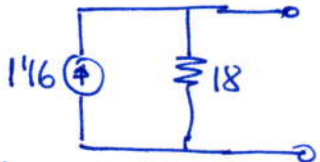
$$8 /\!/ 24 = \frac{8 \cdot 24}{8+24} = 6$$

$$R_{eq} = 2+6+10 = 18$$

Els circuits equivalents són:



$\Leftrightarrow$

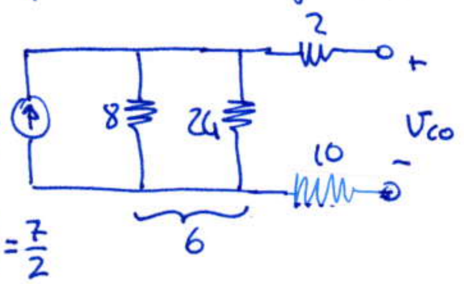


$$i_{cc} = \frac{21}{18} = 1'16$$

Ho hauríem pogut fer d'altres maneres, per exemple amb transformació de fonts.

$$2 + \frac{12}{8}$$

$$2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

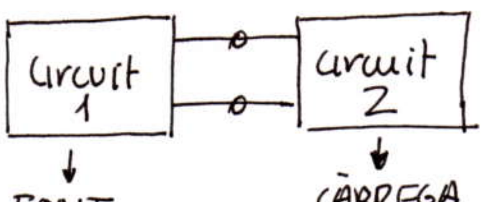


$$v_{co} = \frac{7}{2} \cdot 6 = \frac{42}{2} = 21\ V.$$

També podíem haver trobat Icc enlloc de Req o V_T.

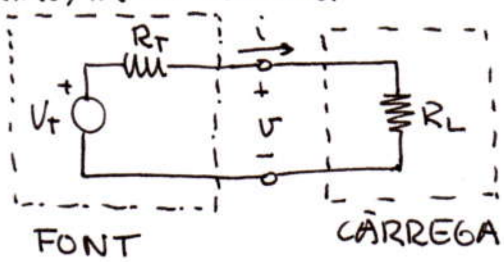
2.8. TRANSFERÈNCIA DE POTÈNCIA

Moltes vegades haurem d'interconnectar dos circuits diferents i voldrem transferir el màxim de senyal de l'un a l'altre. D'aquesta situació en direm adaptació.



El circuit 1 serà la part activa i n'hi direm circuit font. Si és lineal el representarem amb l'equivalent Thevenin. El circuit 2 serà la part passiva i n'hi direm càrrega. Si és lineal el representarem amb una resistència.

Així, si és lineal,



La potència que arribarà a la càrrega serà:

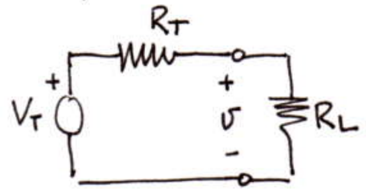
$$i = \frac{V_T}{(R_T+R_L)} \qquad P_L = i^2 \cdot R_L$$

$$P_L = \frac{V_T^2}{(R_T+R_L)^2} \cdot R_L$$

Ens podrem trobar amb 3 situacions diferents:

→ SITUACIÓ 1: R_L fixa i R_T variable

Aquesta situació no es dóna gaire sovint. La R_L no la podem variar, i haurem de buscar la R_T que farà que la potència transferida a la càrrega és màxima.



$$v = \frac{R_L}{R_L+R_T} \cdot V_T \rightarrow v_{max} = v_T \text{ si } R_T = 0$$

$$i = \frac{v_T}{R_L+R_T} \rightarrow i_{max} = \frac{v_T}{R_L} \text{ si } R_T = 0$$

En aquest cas es dóna v_{max} i i_{max} per la mateixa condició, i per tant, en aquest cas, tindrem també potència màxima.

$$P_{max} = v_{max} \cdot i_{max} \rightarrow \boxed{P_{max} = \frac{v_T^2}{R_L}} \quad \text{si } R_T = 0$$

→ SITUACIÓ 2: R_T fixa i R_L variable

Aquesta situació és la més habitual. La R_T no la podrem canviar, però sí la càrrega R_L. Per tant, buscarem quin valor ha de tenir la càrrega, per tal que la font li transfereixi màxima potència.

Veiem primer quan tenim tensió màxima a la càrrega:

$$v = \frac{R_L}{R_T+R_L} \cdot v_T \rightarrow v_{max} = v_T$$ quan tenim un c.o, no hi ha càrrega

Veiem ara quan tenim la intensitat màxima:

$$i = \frac{v_T}{R_T+R_L} \rightarrow i_{max} = i_{cc}$$ quan la $R_L = 0$, és a dir, és un c.c.

Veiem que no podem tenir simultàniament tensió i intensitat màximes. Aleshores buscarem quina és la situació que fa la potència màxima.

La potència tindrà l'expressió:

$$P = U \cdot I = \frac{R_L U_T}{R_T + R_L} \cdot \frac{U_T}{R_T + R_L} = \frac{R_L \cdot U_T^2}{(R_T + R_L)^2}$$

Ara hauríem de buscar quina és la R_L que fa que la potència sigui màxima. Ho farem derivant l'expressió de la potència respecte R_L i igualant-la a 0.

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{U_T^2 \cdot (R_T + R_L)^2 - R_L \cdot U_T^2 \cdot 2(R_T + R_L)}{(R_T + R_L)^4} = 0$$

El numerador haurà de ser igual a 0:

$$\cancel{U_T^2}(R_T + R_L)^{\cancel{2}} = R_L \cdot \cancel{U_T^2} \cdot 2 \cdot \cancel{(R_T + R_L)}$$

$$(R_T + R_L) = 2R_L \Rightarrow \boxed{R_L = R_T}$$

Així doncs, quan la resistència de la càrrega sigui igual que la de la font, la potència transmesa a la càrrega serà màxima i valdrà:

$$P = \frac{R_L \cdot U_T^2}{(R_L + R_T)^2} = \frac{R_T \cdot U_T^2}{(2R_T)^2} = \frac{\cancel{R_T} U_T^2}{4 R_T^{\cancel{2}}} \rightarrow \boxed{P_{max} = \frac{U_T^2}{4 R_T}}$$

La potència també la podrem expressar d'altres maneres. Si coneixem l'equivalent Norton, també podríem trobar la potència màxima de la següent manera:

$$U_T = i_N \cdot R_T \rightarrow P = \frac{i_N^2 \cdot R_T^{\cancel{2}}}{4 \cancel{R_T}} \rightarrow \boxed{P_{max} = \frac{i_N^2 \cdot R_T}{4}}$$

Tenint sempre present que $R_L = R_T$, encara la podem expressar d'una altra manera:

$$P = \frac{U_T^2}{4 R_T} = \frac{U_T}{4} \cdot \frac{U_T}{R_T} = \frac{U_T}{4} \cdot i_N = \frac{U_T}{2} \cdot \frac{i_N}{2} \Rightarrow \boxed{P_{max} = \frac{U_{CO}}{2} \cdot \frac{i_{cc}}{2}}$$

Aquestes expressions només seran vàlides si estem en situació d'adaptació. Si a més coneixem la tensió de Thevenin o la intensitat de Norton, ho podrem fer així.

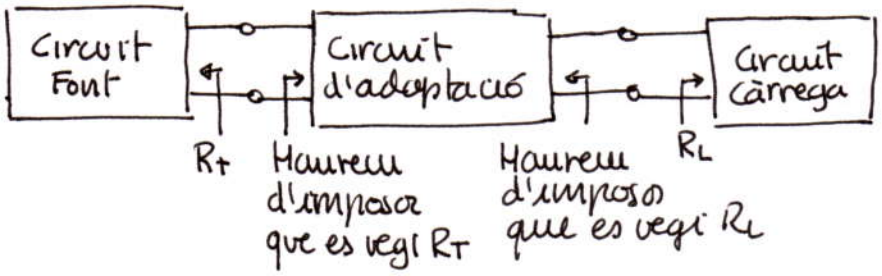
De tota manera, sempre podrem utilitzar les expressions generals de la potència, on haurem de conèixer la tensió o la intensitat a la càrrega.

$$P = \frac{U_o^2}{R_L} \quad \text{ó} \quad P = i_o^2 \cdot R_L$$

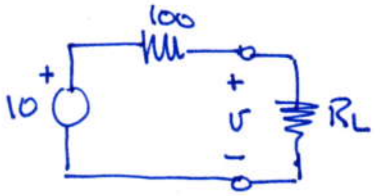
Aquestes sempre són vàlides, i si es compleix adaptació, també trobarem la potència màxima.

→ **SITUACIÓ 3:** R_T fixa i R_L fixa

Ens podem trobar amb casos en què no puguem variar ni R_T ni R_L. En aquesta situació, si volem màxima transferència de potència, haurem d'intercalar un circuit d'adaptació.



Ex: 3.10 llibre



→ Trobar R_L per $v = 10\,V$

→ Trobar R_L per $i = 10\,mA$

→ Si no hi ha adaptació, trobar R_L perquè n'hi hagi. Trobar i, v i P màximes.

→ R_L per $v = 10$ $\Rightarrow$ $v = v_{CO}$ $\Rightarrow$ $R_L = c.o$

→ R_L per $i = 10\,mA$ $\Rightarrow$ $i = \dfrac{10\,V}{100 + R_L} = 10\,mA$ $\Rightarrow$ $10V = 10mA \cdot 100 + 10mA \cdot R_L$

$10 = 1 + 0'01 \cdot R_L \rightarrow R_L = \dfrac{9}{0'01} \Rightarrow R_L = 900\,\Omega$

→ Cap dels dos casos anteriors és d'adaptació, per tenir-ne, $R_L = 100\,\Omega$

$v = \dfrac{100}{200} \cdot 10V \Rightarrow v = 5V$

$i = \dfrac{10V}{200} = 50\,mA \Rightarrow i = 50\,mA$

$P_{max} = i \cdot v = 50mA \cdot 5V \Rightarrow P_{max} = 250\,mW$

També podíem haver buscat la potència amb les altres expressions que hem trobat abans:

$$P_{max} = \frac{v_T^2}{4R_T} = \frac{10^2}{4 \cdot 100} = 0'25\,W$$

$$P_{max} = \frac{i_N^2 \cdot R_T}{4} = \frac{0'1^2 \cdot 100}{4} = 0'25\,W$$

$$i_{sc} = \frac{10}{100} = 0'1\,A = 100\,mA$$

2.8.1. Potència en escala logarítmica

Els propers cursos veurem que és interessant expressar la potència en escala logarítmica:

$$P(dBW) = 10 \log_{10} \frac{P(W)}{1W}$$

Com que sovint tenim potències petites, es sol utilitzar més l'expressió següent:

$$P(dBm) = 10 \log_{10} \frac{P(mW)}{1mW}$$

Com que haurem de treballar amb expressions logarítmiques, cal recordar que:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Vegem alguns valors bàsics de potència a què equivalen en dB:

$1mW \to 0dBm$
$10mW \to 10dBm$
$100mW \to 20dBm$
$10^3 mW \to 30dBm$
$10^4 mW \to 40dBm$

$10^{-1} mW \to -10dBm$
$10^{-2} mW \to -20dBm$
$10^{-3} mW \to -30dBm$
$10^{-4} mW \to -40dBm$

$2mW \to \sim 3dBm$
$4mW = 2 \cdot 2 \to \sim 3+3 = 6dBm$
$20mW = 2 \cdot 10 \to \sim 3+10 = 13dBm$
$400mW = 4 \cdot 10^2 \to \sim 6+20 = 26dBm$
$0'5mW = 1/2 \to \sim -3dBm$
$5mW = 10/2 \to \sim 10-3 = 7dBm$

Observant els valors anteriors, arribem a les següents conclusions:

→ Doblar mW, vol dir sumar 3dBm
→ Dividir mW per 2, vol dir restar 3dBm
→ Fer el quadrat en mW, vol dir doblar dBm.
→ Si tenim ordres de magnitud molt diferents, per exemple W i µW (6 ordres de magnitud), en dBm representarà multiplicar per 6.