

# TEMA 1: FONAMENTS DE TEORIA DE CIRCUITS

## 1.1. INTRODUCCIÓ

En aquest tema, tractarem les bases de la teoria de circuits. Després de veure una introducció, veurem quines són les variables d'un circuit, com modelem i analitzem circuits, quins són els principals elements de circuit i les seves equacions i acabarem amb les lleis d'interconnexió.

Nosaltres treballarem amb circuits que transmeten energia elèctrica. Aquesta s'utilitza molt pels següents motius:

- Es pot transmetre fàcilment a punts allunyats
- Es pot convertir fàcilment a altres energies (mecànica, química, tèrmica, ...)
- És molt útil per transmetre informació, processar i emmagatzemar <sup>senyals</sup>.

Abans d'entrar amb més detall, avem a veure algunes definicions que us ajudaran a entendre aquesta i altres assignatures:

Teoria de circuits: Es dedica a l'estudi de sistemes que processin informació en forma de senyal elèctric.

Sistema: Interconnexió d'elements que permeten aconseguir un objectiu, que no es podria aconseguir per separat.

Processar: Actuar, operar

Informació: Qualsevol magnitud que us agradaria conèixer de l'entorn (temperatura, llum, so, moviment, ...)

Senyal: Qualsevol magnitud física que la seva evolució en el temps conté informació. En el nostre cas serien tensions i corrents.

Transductor: Transforma senyals d'una naturalesa en uns altres d'una naturalesa diferent.

EX: LDR: llum  $\rightarrow$  elèctric

LED: elèctric  $\rightarrow$  llum

Microfon: acústic  $\rightarrow$  elèctric

Altaveu: elèctric  $\rightarrow$  acústic

Sistemes processadors de senyals elèctrics:

Són aquells que accepten un senyal elèctric i el processen o transformen, per tal de extreure o millorar la informació del senyal.

EX: Un amplificador, fa que el senyal més gran, i facilita el seu processament.



Aquests sistemes es poden classificar de diferents maneres:

- Segons el tipus de senyal:

- Sistema analògic: El valor del senyal està definit per qualsevol instant de temps. La seva forma és contínua. Per exemple un  $\sin(t)$ .
- Sistema digital: També en diem discrets. No tenim valors del senyal per qualsevol instant de temps, només en intervals concrets.  
Si al digitalitzar un senyal tenim les mostres menys fines, no perdrem informació.  
Els senyals digitals, solen agafar només dos valors, habitualment 0 i 5V.

- Segons les dimensions (en comparació amb la longitud d'ona):

- Sistema de paràmetres concentrats: Són aquells sistemes on els senyals es propaguen instantàniament (es dona quan tenim distàncies curtes. Seran aquells circuits que compleixin que les seves dimensions són molt inferiors a la longitud d'ona del senyal ( $d \ll \lambda$ ).

$$\text{Si } f = 20 \text{ kHz} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{20 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}} = 15 \cdot 10^4 \text{ m}$$

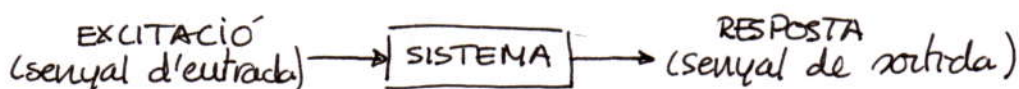
No costa gaire per circuits més petits que això, per tant es pot considerar que el senyal està a tot arreu al mateix temps.

- Sistema de paràmetres distribuïts: Són aquells sistemes on no es pot considerar que el senyal es propagui instantàniament. Són els circuits que no compleixen que  $d \ll \lambda$ .

$$\text{Si } f = 1 \text{ GHz} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{10^9 \text{ s}^{-1}} = 0.3 \text{ m} = 30 \text{ cm}$$

Ara ja no podem assegurar que sempre  $d \ll \lambda$ . No podem considerar que el senyal estigui a tot arreu al mateix temps. Això sol passar quan tenim cables i treballem a freqüències altes. S'ha de considerar que hi ha propagació. Això s'estudia més endavant a radiofreqüència.

Amb aquestes definicions, podríem dir que la teoria de circuits estudia els sistemes analògics de paràmetres concentrats que processen informació en forma de senyal elèctric.



Si donat un sistema es vol trobar la resposta en funció del senyal d'entrada, direm que fem ANÀLISI (una sola solució).

Si per una resposta concreta, volem trobar quin és el sistema, direm que fem un DISENY (moltes solucions possibles).

Nosaltres farem bàsicament anàlisi, tot i que podem també dissenyar.



## 1.2. VARIABLES D'UN CIRCUIT

Existeixen unes variables fonamentals que, amb unitats del sistema Internacional, són:

càrrega ( $q$ ), amb unitat  $C$  (Coulomb)  
energia ( $W$ ), amb unitat  $J$  (Joule).

No serà pràctic treballar amb aquestes variables, i utilitzarem les anomenades variables de senyal, que es deriven de les fonamentals, que seran:

intensitat ( $i$ ), amb unitat  $A$  (Amperes)  
tensió ( $V$ ), amb unitat  $V$  (Volts)  
potència ( $P$ ), amb unitat  $W$  (Watts)

Amem a veure quin és l'origen d'aquestes variables:

### 1.2.1. Intensitat de corrent

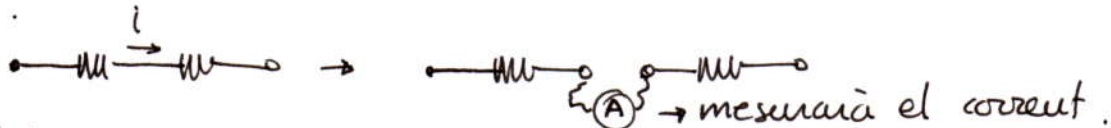
Per simplificar se li sol dir intensitat o corrent.

Cal tenir en compte que les càrregues es mouen (les positives i les negatives s'atrauen i repelen entre elles). A més, és engorros treballar amb valors tan petits ( $q = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ ).

Serà més pràctic utilitzar la càrrega que travessa un punt per unitat de temps (circulació de càrrega), que serà la intensitat de corrent.

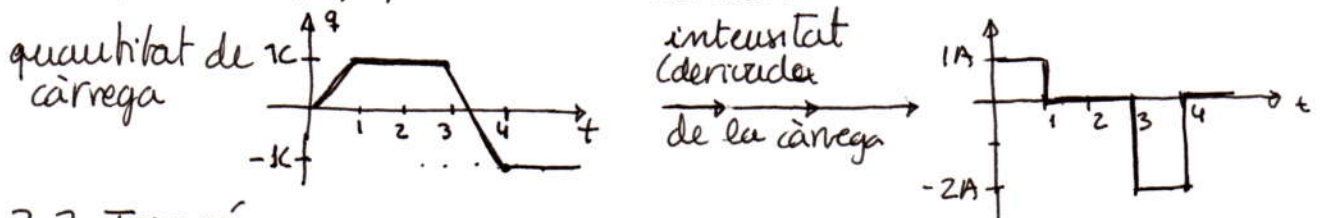
$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow 1 \frac{C}{s} = 1A \text{ (Amper)}.$$

El corrent es mesura amb un amperímetre, insertant-lo al circuit.



El sentit de la intensitat es defineix com a moviment de càrregues net. Sempre haurem d'assignar un sentit al corrent.

Recordant el concepte de derivada (rapidesa amb què canvia la funció: pendent), gràficament tindriem:



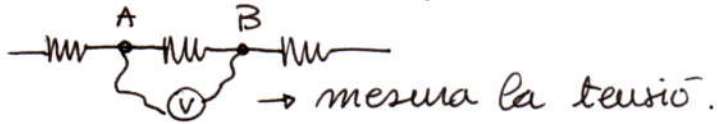
### 1.2.2. Tensió

Tampoc serà pràctic treballar amb l'energia. Amb els nostres circuits, serà més pràctic treballar amb la tensió, que serà la variació d'energia que experimenta una càrrega al moure's pel circuit.

Si tenim una càrrega que experimenta una variació d'energia per passar del punt A al B, la tensió serà la variació d'energia per unitat de càrrega.

$$V = \frac{dW}{dq} \rightarrow 1 \frac{J}{C} = 1V (Vdt)$$

Si volem mesurar la tensió, posarem el voltímetre entre dos punts, mentre el circuit està funcionant.



### 1.2.3. Potència

La potència ens serà útil, perquè es pot calcular fàcilment a partir de les variables de circuit.

La potència és la variació de l'energia per unitat de temps. Així tindrem:

$$P = \frac{dW}{dt} \rightarrow 1 \frac{J}{s} = 1W (Watt)$$

Posant-ho en funció de les altres variables:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = V \cdot i \Rightarrow \underline{P = V \cdot i} \rightarrow \text{habitualment ho farem així.}$$

A partir de la potència i l'energia, es poden saber característiques dels components:

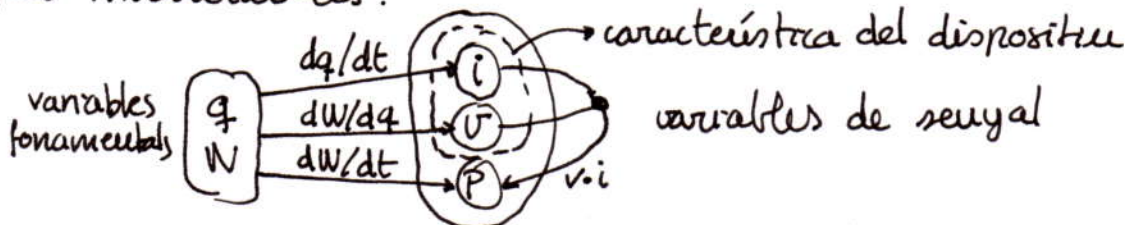
Si  $P > 0$  absorbeix energia  
 Si  $P < 0$  entrega energia

$\rightarrow W = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt$  pot absorbir i després donar  
 Si  $W > 0$  element passiu  
 Si  $W < 0$  element actiu  
 ↳ Pot donar sense haver absorbit abans.

Malgrat que les variables fonamentals són  $q$  i  $W$ , s'utilitzen sempre  $V$  i  $I$ , perquè són més fàcils de mesurar.

### 1.2.4. Criteris pels elements passius

Veurem primer un esquema-resum de les variables que utilitzarem, per veure després els criteris que utilitzarem per mesurar-les.

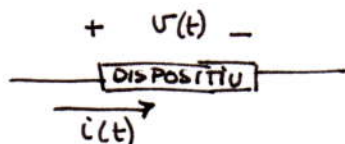


La intensitat es mesura en un punt (càrrega que passa a través del punt) i se li assigna un sentit.

La tensió es mesura entre dos punts (variació d'energia entre dos punts) i se li assigna una polaritat.



Agafarem normalment el següent criteri:



S'agafa aquest conveni de referència perquè les càrregues entren amb un potencial i surten amb menys. Aquesta diferència d'energia es perd (dissipa) o s'emmagatzema.

Si la intensitat és negativa, vol dir que tindrà sentit contrari.

Si la tensió és negativa, vol dir que la polaritat està al revés.

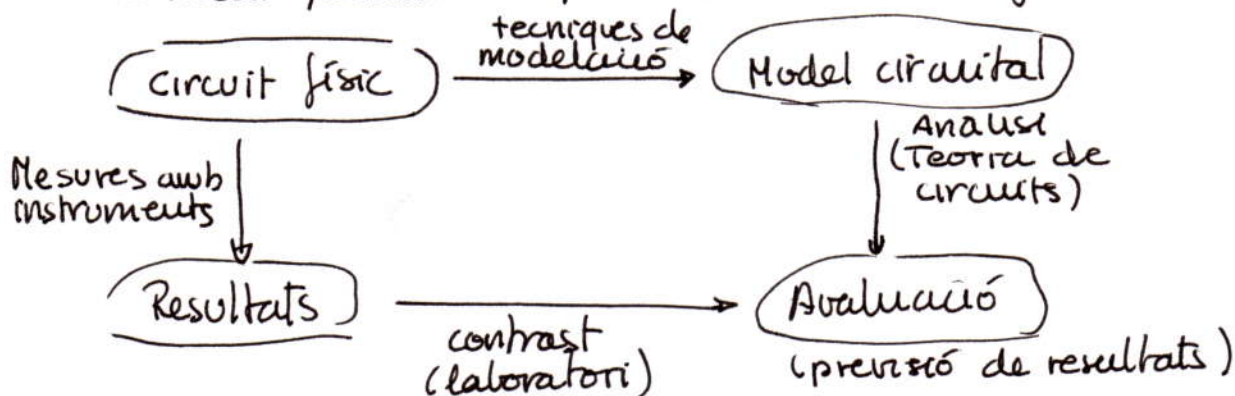
Si es tracta d'un element passiu, la intensitat sempre entrarà pel positiu, de manera que la potència serà positiva i l'element absorbirà energia.

### 1.3. MODELACIÓ I ANÀLISI

Veïem primer algunes definicions que ens permetran veure què vol dir modelar i analitzar.

- Dispositiu: És un component real, físic, que podem trobar al catàleg d'una botiga.
- Element de circuit: És el model d'un dispositiu. Es defineix per la seva característica  $i-v$  (equació matemàtica). A cada element li correspondrà un símbol.
- Circuit físic: Interconnexió de dispositius de manera que formen un camí tancat. Els dispositius es connectaven soldant-los a una placa de circuit imprès, o en una protoboard (com en el laboratori).
- Model circuital: Habitualment en direm tan sols circuit. Interconnexió d'elements de circuit de manera que formen un camí tancat. Es representarà mitjançant un conjunt d'equacions matemàtiques. Dels punts d'unió en direm nodes.

Esquemàticament podem dir que el procés és el següent:





Així doncs, un model serà la representació matemàtica d'un circuit físic o d'un dispositiu. Un cop tinguem el model, el podrem analitzar i fer una previsió dels resultats. Aquests es podran contrastar amb els resultats reals trobats al laboratori. Si el model és precís, la previsió de resultats serà molt aproximada als resultats reals.

## 1.4. ELEMENTS DE CIRCUIT. EQUACIONS CONSTITUTIVES

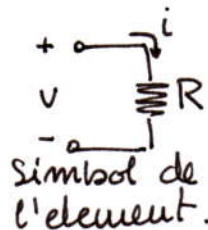
Veuem alguns elements de dos terminals que utilitzarem en aquesta assignatura. Aquests bipols veuen definits per la  $i$  i per la  $v$ . Per cadascun d'ells, veurem quin és el seu símbol, la seva característica  $i-v$  i la seva equació matemàtica. Tot això serà necessari per treballar amb models.

### 1.4.1. Resistor o Resistència (resistor)

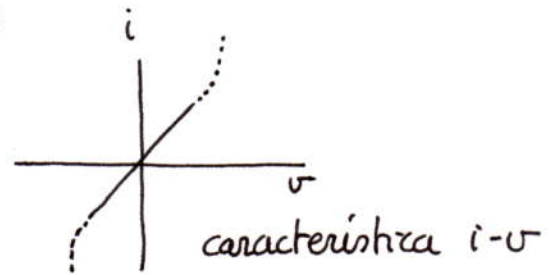
El dispositiu es diu resistor, però al modelar, habitualment parlarem de resistència (resistance)



Dispositiu



Símbol de l'element.



No té una característica totalment lineal (veiem que als extrems es corba una mica), però es pot aproximar molt bé per una recta si limiteu la zona de treball. Aquest límit vindrà donat per la potència. Si ens mantenim dins els límits, es pot treballar amb una equació lineal anomenada Lei d'Ohm.

$$V = R \cdot i$$

$$i = \frac{V}{R} = G \cdot V$$

$R$  (resistència). Unitat  $\Omega$  (ohm). Habitualment  $k\Omega$ .

$G$  (conductància). Unitat  $\sigma$  o  $\Omega^{-1}$  (mho)

Se m'hi hauria de dir resistència lineal, però sempre m'hi direm resistència.

Veuem com podem escriure la potència d'una resistència:

$$P = V \cdot i = R \cdot i \cdot i \Rightarrow \boxed{P = R i^2}$$

$$P = V \cdot i = V \cdot \frac{V}{R} \Rightarrow \boxed{P = \frac{V^2}{R}}$$

Com que la resistència és sempre positiva, la potència també ho serà:

$$P > 0 \Rightarrow \text{absorbeix potència}$$

Si l'energia és la integral de la potència, i aquesta és sempre positiva, l'energia també ho serà.

$$W > 0 \Rightarrow \text{element passiu}$$



Ex: Hem dit que la potència limita el funcionament lineal de la resistència. Suposem que aquesta pot suportar una potència màxima de 0'25W. Trobar  $i_{max}$  i  $V_{max}$  perquè treballi en zona lineal una  $R=47k\Omega$

$$P_{max} = i_{max}^2 \cdot R = \frac{V_{max}^2}{R}$$

$$i_{max}^2 = \frac{P_{max}}{R} = \frac{0'25W}{47.000\Omega} = 5'3 \cdot 10^{-6} \Rightarrow i_{max} = 2'3mA$$

$$V_{max}^2 = P_{max} \cdot R = 0'25W \cdot 47.000\Omega = 11.750 \Rightarrow V_{max} = 108'4V$$

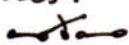


No hem de patir per la tensió, que no hi arribarem pas. Caldria vigilar amb la intensitat, ja que a 2'3mA s'hi pot arribar fàcilment.

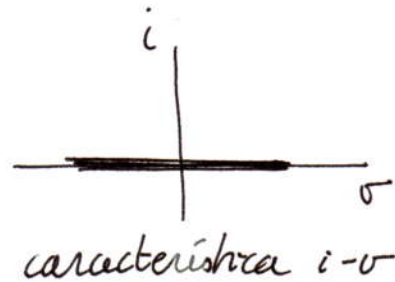
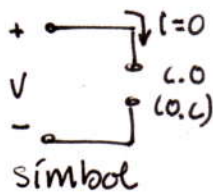
### 1.4.2. Circuit obert (open circuit)

És un cas especial de la resistència, quan aquesta tendeix a  $\infty$ . Si fixem la tensió mentre la resistència va augmentant, la intensitat anirà decreixent, fins que arribarà un moment que s'anularà.

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow 0$$

el dispositiu té diverses formes:

interruptor   
 switch   
 pulsador... 

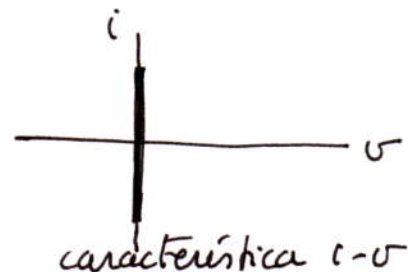
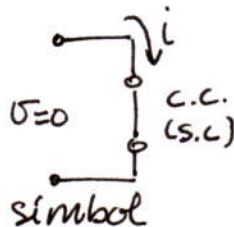


### 1.4.3. Curtcircuit (shortcircuit)

És un cas especial de la resistència, quan aquesta tendeix a 0. Si fixem la intensitat mentre la resistència va disminuint, la tensió també anirà disminuint, fins que arribarà un moment que s'anularà.

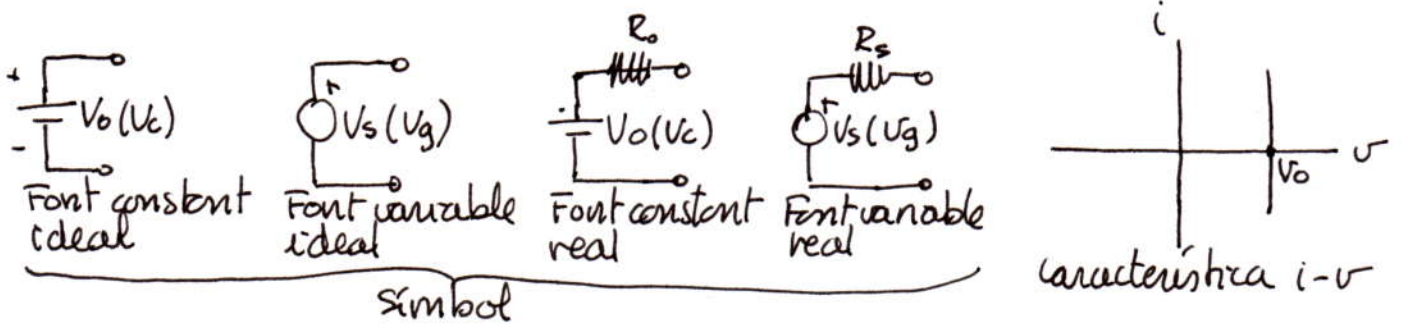
$$R \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow 0$$

el dispositiu en sí no existeix, acaba sent un cable connectat. És qualsevol interruptor en posició ON.



### 1.4.4. Font de tensió (Voltage Source)

Pot ser una font constant o variable. Nosaltres utilitzarem normalment la font ideal, però la que tindrem al laboratori serà real. Tindrà diferents símbols en funció d'això.

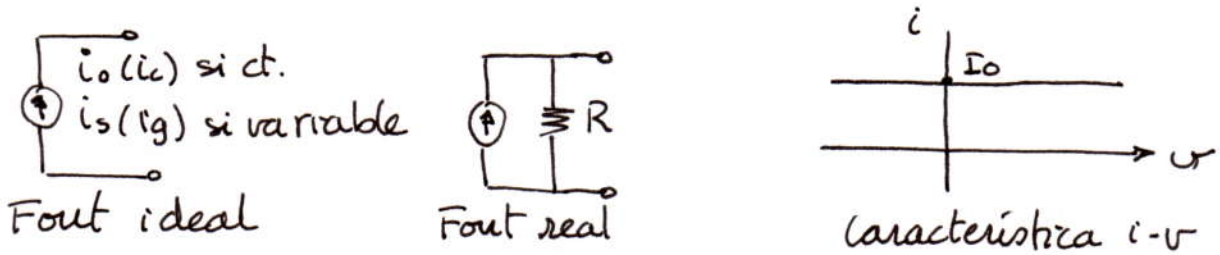


Com podem veure a la gràfica, la tensió sempre serà la que dona la font. La intensitat anirà variant en funció del que demana el circuit.

Si desconnectem la font, tenim un c.c.  $\rightarrow V=0$

#### 1.4.5. Font de corrent (current source)

Les fonts de corrent també podem ser constants o variables, ideals o reals.



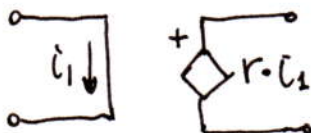
Com veiem a la gràfica, el corrent sempre és el que dona la font. La tensió anirà variant en funció del que demani el circuit.

Si desconnectem la font, tenim un c.o.  $\rightarrow i=0$

#### 1.4.6. Fonts de tensió controlades (controlled voltage source)

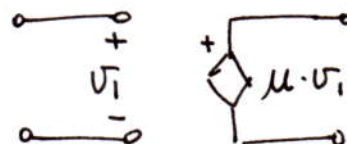
Les fonts de tensió controlades no són dispositius reals, són models que s'utilitzen per modelar dispositius més complexos.

Font de tensió controlada per intensitat (current controlled voltage source)



$r$  té dimensions de  $R$  (transresistència)

Font de tensió controlada per tensió (voltage controlled voltage source)



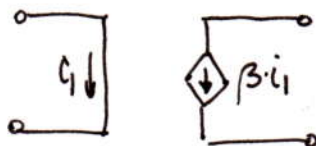
$\mu$  és adimensional (guany de tensió en c.o.)



### 1.4.7. Fonts d'intensitat controlades (controlled current source)

Igual que les de tensió, no són dispositius reals.

Font d'intensitat controlada per intensitat  
(current controlled current source).



$\beta$  és adimensional  
(guany d'intensitat en c.c.)

Font d'intensitat controlada per tensió  
(voltage controlled current source)



$g$  té dimensions de conductància  
(transconductància).

Ja hem dit que les fonts controlades no són reals. Les utilitzem només per modelar dispositius actius com els transistors, amplificadors operacionals, ...  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $r$  o  $g$  ens donen el guany.

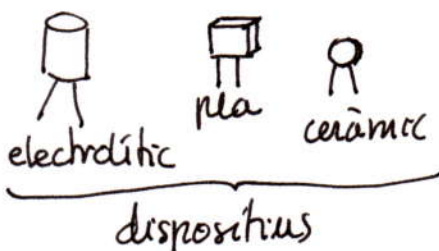
Aquestes fonts no les podem desconnectar, ja que depenen d'una variable que està en una altra part del circuit. Les variables que controlen les fonts poden estar en qualsevol part del circuit.

### 1.4.8. Massa (node de referència)

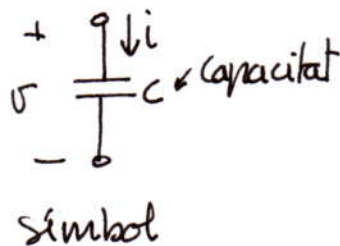
Símbol  $\perp$

Recordem que les tensions es mesuren sempre entre 2 nodes. Com a tenir un node de referència, i mesurar totes les tensions que es pugui respecte aquest. Normalment el dibuixarem a baix.

### 1.4.9. condensador (capacitor)



Hi ha condensadors de diferents tipus.



Les unitats de capacitat són el Faraday (F)  
Normalment treballarem amb  $\mu\text{F}$ ,  $\text{nF}$  o  $\text{pF}$ .



Els condensadors es regeixen per la següent equació:

$$i_c = C \frac{dV_c}{dt}$$

La tensió en el condensador no pot tenir canvis bruscs, sinó la  $i_c \rightarrow \infty$ .

Si la  $V_c = ct \Rightarrow i_c = 0$  (es comporta com un L.O)

Per trobar la tensió a partir del corrent, hauréu d'integrar:

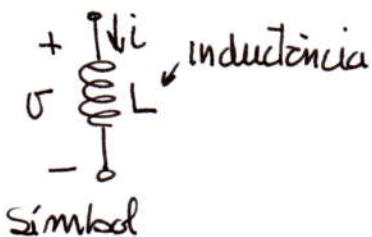
$$V_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(t) dt$$

Veiem que hauréu de saber què passa abans de  $t=0$ .

El condensador és un element passiu ( $W \geq 0$ ) però a vegades pot entregar energia si abans l'ha absorbit ( $P$  pot ser positiva o negativa). És capaç d'emmagatzemar energia.

#### 1.4.10. Inductor o bobina (Inductor)

A la realitat, són fil. de coure fent espiral al voltant d'un nucli.



La inductància es mesura en Henrys (H).  
Habitualment treballarem amb  $\mu H$  i  $mH$ .

Les bobines es regeixen per la següent equació:

$$V_L = L \frac{di_L}{dt}$$

La intensitat en L no pot tenir canvis bruscs, sinó la  $V_L \rightarrow \infty$

Si la  $i_L = ct \Rightarrow V_L = 0$  (es comporta com un C.C.)

Per trobar la intensitat a partir de la tensió, hauréu d'integrar:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V_L(t) dt$$

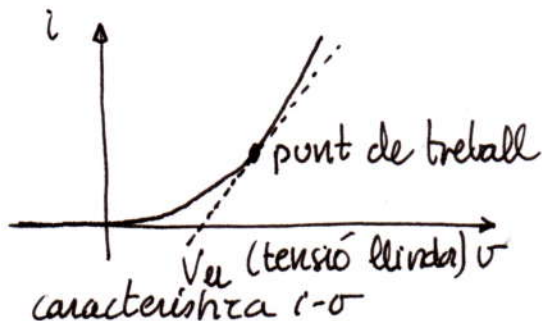
Aquí també hauréu de saber què passa abans de  $t=0$ .

Veiem que és dual al condensador.

També és un element passiu que pot emmagatzemar energia.

#### 1.4.11. LED (Light-Emitting Diode)

El LED és un element no lineal, que no treballarem massa aquest curs, però que utilitzarem al laboratori. La seva característica  $i-v$  real és:

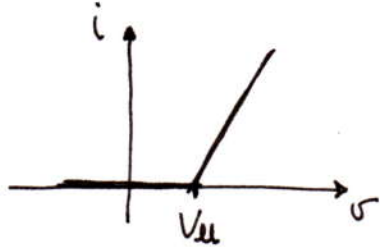


Per poder treballar amb aquest dispositiu, hauréu de buscar models lineals.





El model lineal més aproximat serà:



$v < V_u \rightarrow$  El model per aquest tram és un c.o. ( $i=0$ )

$v > V_u \rightarrow$  És una línia tangent al punt de treball. És com una resistència.

Com que el pendent d'aquesta gràfica és molt elevat, solem agafar un model encara més senzill:



$v < V_u \rightarrow i=0 \rightarrow$  c.o.

$v = V_u \rightarrow$  Es comporta com una font de tensió de valor  $V_u$ .

### 1.4.12. Fotoresistència o LDR (Light Dependent Resistor)

També se'n pot dir fotoresistor o cel·lula fotoelèctrica.

És una resistència que disminueix de valor quan augmenta la llum.

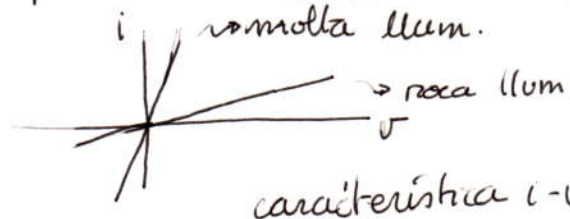
Depenent dels LDR, la resistència pot oscil·lar entre  $50\ \Omega$  i  $M\ \Omega$ .



dispositiu



símbol



característica i-v

Utilitzarem aquest dispositiu en les pràctiques. Farem els càlculs amb un valor de resistència en clar i en altre en fosc.

### 1.5. LLEIS D'INTERCONEXIÓ

Fins ara hem vist els elements i els seus models. Ara hauréu de veure les equacions que regiran les interconnexions donades pels circuits (que són conjunts d'elements). Quan analitzem circuits, hauréu de tenir en compte les equacions donades pels elements i per les connexions.

Per les connexions utilitzarem les lleis de Kirchhoff. Aquestes ens diuen que al formar un circuit, les tensions i corrents es comporten d'una determinada manera.

Si un circuit és un conjunt d'elements connectats pels seus terminals, els nodes seran els punts on s'hi connecten 2 o més elements, encara que no forzosament s'han de representar per un punt.



### 1.5.1. La llei de Kirchhoff (KCL)

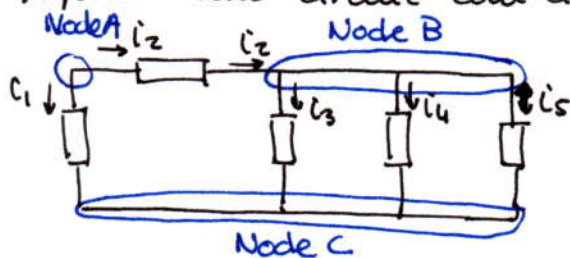
Les regles de KCL veuen de l'anglès Kirchhoff Current Law. Aquesta llei ens diu que la suma d'intensitats que arriben a un node és 0.

Agafarem com a criteri:  $\sum i_{\text{entrants}} = 0$

També podríem agafar com a criteri que la suma d'intensitats que surten d'un node és 0.

Així tindríem:  $\sum i_{\text{sortints}} = 0$

Suposem un circuit com el següent:



Els passos a seguir seran:

- Identificar N nodes
- Assignar sentits als corrents
- Aplicar KCL a N-1 nodes (un és el de referència).
- Amb N-1 equacions podrem trobar N-1 incògnites.

Els sentits dels corrents els podrem assignar com vulguem, però ho farem amb certa coherència, seguint els convenis de referència establerts. El sentit l'indicarem sempre amb una fletxa. Si nosaltres considerem un corrent entrant i el sentit està assignat com a sortint, li posarem un signe negatiu. Si quan trobem el valor d'un corrent ens dona negatiu, vol dir que el sentit que li hem assignat inicialment no era el correcte, i és l'invers.

Seguirem els passos que hem indicat node a node: considerarem C com a node de referència i plantejarem les equacions a A i B:

$$\text{NODE A} \rightarrow -i_1 - i_2 = 0 \quad (\text{també } i_1 + i_2 = 0)$$

$$\text{NODE B} \rightarrow i_2 - i_3 - i_4 + i_5 = 0 \quad (\text{també } -i_2 + i_3 + i_4 - i_5 = 0)$$

↳ Veiem que  $i_2$  i  $i_5$  entren al node, i en canvi,  $i_3$  i  $i_4$  surten del node. Aquesta equació la podríem escriure també:

$$i_2 + i_5 = i_3 + i_4$$

Així, generalitzant, podríem definir també la llei com:

$$\sum i_{\text{entrants}} = \sum i_{\text{sortints}}$$

#### Ex: 2.6 llibre

Suposem el circuit anterior on tenim que:  $i_1 = -4$ ,  $i_3 = 1$ ,  $i_4 = 2$ , trobar els altres valors.

$$-i_1 - i_2 = 0 \Rightarrow 4 - i_2 = 0 \Rightarrow \underline{i_2 = 4}$$

$$i_2 + i_5 = i_3 + i_4 \Rightarrow i_5 = i_3 + i_4 - i_2 = 1 + 2 - 4 \Rightarrow \underline{i_5 = -1}$$

Veiem que  $i_1$  realment entra al node A i  $i_5$  surt de B. Els podríem assignar sentit coherent i dir:  $i_1 = 4$ ,  $i_5 = +1$ .



Què hauria passat si a  $I_2$  se li hagués assignat sentit estrictament a A?

$$-I_1 + I_2 = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = -I_1$$

(Igualment tindriem un corrent que surt de A).

Si fem el càlcul de  $I_5$ , ens continuaria donant igual:

$$-I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0 \Rightarrow I_5 = I_2 + I_3 + I_4 = -4 + 1 + 2 = -1$$

### 1.5.2. 2a llei de Kirchhoff (KVL)

Les regles de KVL vénen de l'anglès Kirchhoff Voltage Law. Aquesta llei ens diu que la suma de tensions al llarg d'una malla és 0.

Agafarem com a criteri recórrer la malla en sentit horari. Agafarem una tensió com a positiva si al recórrer la malla en sentit horari entrem pel + de la seva polaritat. En canvi l'agafarem negativa si entrem pel -.

Així tindriem com a conveni:

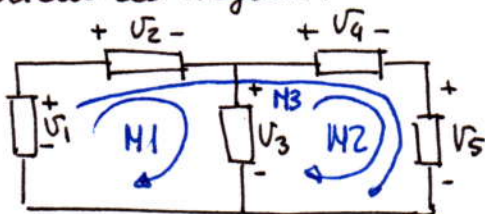
$$\sum V_{\text{am. tuncat sentit horari}} = 0$$

Igual que passava amb el KCL, podríem agafar altres convenis com:

$$\sum V_{\text{am. tuncat sentit antihorari}} = 0$$

$$\sum V_{\text{am. tunc. sentit horari}} = \sum V_{\text{am. tunc. sentit antihorari}}$$

Suposem un circuit com el següent i veiem quins passos hauríem de seguir:



- Identificar les malles
- Assignar polaritats a les tensions (heu d'estar d'acord amb els corrents).
- Aplicar KVL a  $E - (N-1) = E - N + 1$  malles (noteu que la malla 3 es combinació lineal de les altres).

Noteu que amb  $E - N + 1$  equacions podrem trobar  $E - N + 1$  incògnites. Assignarem les polaritats amb coherència, i si algun signe ens surt negatiu, vol dir que li hem assignat al revés.

Seguirem aquestos passos malla a malla:

$$M1 \rightarrow -V_1 + V_2 + V_3 = 0 \quad (V_1 = V_2 + V_3)$$

$$M2 \rightarrow -V_3 + V_4 + V_5 = 0 \quad (V_3 = V_4 + V_5)$$

Per analitzar circuits, hauréu de fer servir els dos tipus d'equacions.



Ex: 2.7. llibre

Suposem el circuit anterior amb  $v_1=5$ ,  $v_2=-3$  i  $v_4=10$

$$-v_1 + v_2 + v_3 = 0 \rightarrow -5 - 3 + v_3 = 0 \Rightarrow \underline{v_3 = 8}$$

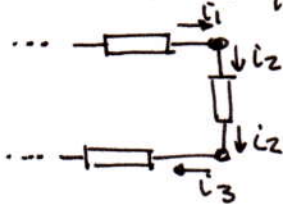
$$-v_3 + v_4 + v_5 = 0 \rightarrow -8 + 10 + v_5 = 0 \Rightarrow \underline{v_5 = -2}$$

Verem que  $v_5$  i  $v_2$  tenen polaritat inversa. Si haguéssim assignat  $v_2=3$  i mantinguéssim la polaritat inversa, tindríem el mateix.

$$-v_1 - v_2 + v_3 = 0 \rightarrow -5 - 3 + v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 8.$$

1.5.3. Connexió sèrie

Diem que dos elements estan en sèrie si comparteixen un node comú al qual no hi ha connectat cap altre element.



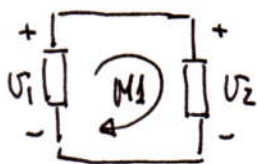
Si apliquem un KCL al node, veurem que pels dos elements que estan en sèrie hi passa el mateix corrent.

$$i_1 - i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2$$

$$i_2 - i_3 = 0 \Rightarrow i_2 = i_3$$

1.5.4. Connexió paral·lel

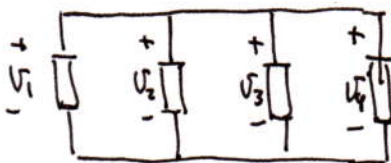
Diem que dos elements estan en paral·lel si estan connectats entre dos nodes comuns.



Aplicant un KVL veurem que els dos elements tenen la mateixa tensió:

$$-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

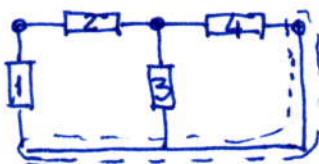
Si tenim més elements en paral·lel, tots ells tindran la mateixa tensió.



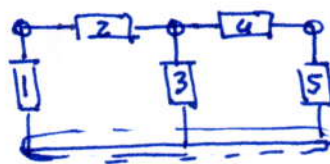
$$\left. \begin{matrix} v_1 = v_2 \\ v_2 = v_3 \\ v_3 = v_4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = v_4$$

Ex: 2.8 llibre

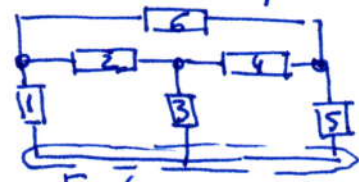
Per cada circuit dir quants elements hi ha, quants estan en sèrie i quants en paral·lel, quants nodes hi ha, quants KCL i KVL es poden escriure.



$E=4$   
Sèrie 1 i 2  
Paral·lel 3 i 4  
 $N=3$   
 $KCL = N-1 = 2$   
 $KVL = E - (N-1) = 2$



$E=5$   
Sèrie 1 i 2, 4 i 5  
Paral·lel cap  
 $N=4$   
 $KCL = N-1 = 3$   
 $KVL = E - (N-1) = 2$



$E=6$   
Sèrie cap  
Paral·lel cap  
 $N=4$   
 $KCL = N-1 = 3$   
 $KVL = E - (N-1) = 3$

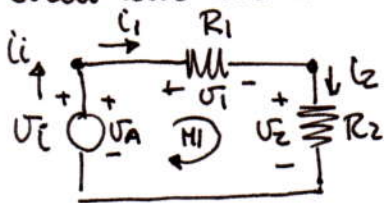


### 1.5.5. Combinació de condicions: Elements i connexions

En analitzar circuits, l'objectiu principal que es persegueix és determinar les intensitats i les tensions del circuit (o almenys algunes).

Aquesta anàlisi es basaria en les condicions imposades a les connexions i als elements. Aquestes condicions són independents les unes de les altres. Les dels elements no depenen del circuit i les de les connexions no depenen dels elements, però les necessitem totes per tenir prou equacions per trobar totes les variables.

Veurem un cas concret:



Tenim 3 elements amb les següents condicions:

$$\begin{aligned}U_1 &= U_A \\U_1 &= i_1 R_1 \\U_2 &= i_2 R_2\end{aligned}$$

Aplicarem KCL a 2 nodes:

$$\left. \begin{aligned}i_1 - i_2 &= 0 \Rightarrow i_1 = i_2 \\i_2 - i_2 &= 0 \Rightarrow i_2 = i_2\end{aligned} \right\} i_1 = i_2 = i_2 \text{ (els 3 elements estan en sèrie)}$$

Aplicarem KVL a 1 malla:

$$-U_A + U_1 + U_2 = 0 \Rightarrow U_A = U_1 + U_2$$

Veurem que tenim 3 elements, que suposen 6 variables (2 per cada element) i tenim 6 equacions, suficients per trobar totes les incògnites.

En general, per qualsevol circuit amb  $E$  elements i  $N$  nodes podrem dir:

$E$  elements  $\rightarrow 2E$  variables

KCL  $\rightarrow N-1$  equacions

KVL  $\rightarrow E-N+1$  "

elements  $\rightarrow E$  "

---

Total  $\rightarrow 2E$  equacions.

Veurem que tindrem  $2E$  equacions, suficients per trobar les  $2E$  incògnites. De tota manera, no sempre les haurem de trobar totes.

Veurem alguns exercicis que ho il·lustren:



### Ex: 2.9. llibre

Donat el circuit anterior amb els valors  $v_i = 10V$ ,  $R_1 = 2k\Omega$  i  $R_2 = 3k\Omega$ , trobar la resta de variables.

$$i_i = i_1 = i_2 = i$$

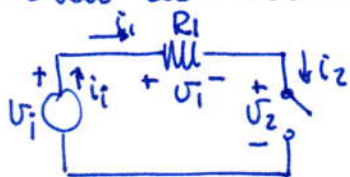
$$v_i = v_1 + v_2 = 2000i + 3000i \Rightarrow 10 = 5000i \Rightarrow \underline{i = 2mA}$$

$$v_1 = 2k\Omega \cdot 2mA = \underline{4V} \quad \text{Podem comprovar que } v = v_1 + v_2$$

$$v_2 = 3k\Omega \cdot 2mA = \underline{6V}$$

### Ex: 2.10 llibre

Donat el següent circuit, i sabent que  $v_i = 10$  i  $R_2 = 2k\Omega$ , trobar la resta de variables.



Les equacions de les connexions seran les mateixes que l'exercici anterior. Variarem les equacions dels elements.

$$i_i = i_1 = i_2 = i$$

$$v_i = v_1 + v_2$$

$$v_1 = i \cdot R_1$$

Per l'interruptor, haurem de veure què passa quan està obert o tancat.

Interruptor obert:

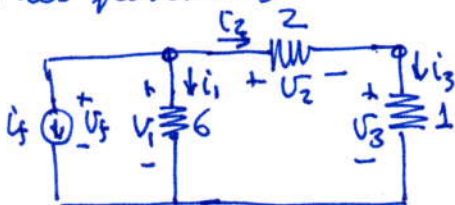
$$i_2 = 0 \Rightarrow \underline{i = 0} \rightarrow v_1 = i \cdot R_1 = \underline{0V} \Rightarrow v_i = v_1 + v_2 = v_2 \Rightarrow \underline{v_2 = 10V}$$

Interruptor tancat:

$$\underline{v_2 = 0} \Rightarrow v_i = v_1 + v_2 \Rightarrow v_i = v_1 \Rightarrow \underline{v_1 = 10V} \rightarrow v_1 = i \cdot R_1 \Rightarrow 10 = i \cdot 2k \Rightarrow \underline{i = 5mA}$$

### Ex: 2.4.2. llibre (pàg 67)

Donat el circuit següent, trobar les intensitats, les tensions i les potències.



En aquest circuit, aparentment simple, necessitem 8 equacions.

Més endavant veurem estratègies per simplificar l'anàlisi.

Les equacions seran:

$$\text{Elements (a): } i_f = 2A, \quad v_1 = 6i_1, \quad v_2 = 2i_2, \quad v_3 = 1 \cdot i_3$$

$$\text{KCL (2): } i_f + i_1 + i_2 = 0, \quad i_2 = i_3$$

$$\text{KVL (2): } v_f = v_1, \quad v_1 = v_2 + v_3$$



Del primer KCL trobem:

$$i_1 = -i_2 - 2$$

Del segon KVL i les equacions dels elements trobem:

$$v_1 = v_2 + v_3 = 2i_2 + i_3 = 2i_2 + i_2 = 3i_2$$

$$v_1 = 6i_1 \rightarrow \text{agafant l'er KCL} \Rightarrow v_1 = -6i_2 - 12$$

Igualant les dues tensions  $v_1$ :

$$3i_2 = -6i_2 - 12 \Rightarrow 9i_2 = -12 \Rightarrow i_2 = -\frac{12}{9} \Rightarrow \underline{i_2 = -\frac{4}{3} \text{ A}} \quad \underline{i_3 = -\frac{4}{3} \text{ A}}$$

Recuperant el primer KCL:

$$i_1 = -i_2 - 2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \underline{i_1 = -\frac{2}{3} \text{ A}}$$

Ara podem trobar les tensions fàcilment:

$$v_1 = 6 \cdot i_1 = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \underline{v_1 = -4 \text{ V}} \quad \rightarrow \underline{v_f = -4 \text{ V}}$$

$$v_2 = 2 \cdot i_2 = 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \underline{v_2 = -\frac{8}{3} \text{ V}}$$

$$v_3 = 1 \cdot i_3 = 1 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \underline{v_3 = -\frac{4}{3} \text{ V}}$$

Ara, que ja tenim totes les intensitats i tensions, podem trobar les potències:

$$P_f = v_f \cdot i_f = -4 \cdot 2 = -8 \text{ entrega potència}$$

$$P_1 = v_1 \cdot i_1 = -4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{8}{3} \text{ absorberx potència}$$

$$P_2 = v_2 \cdot i_2 = -\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = +\frac{32}{9} \text{ absorberx potència}$$

$$P_3 = v_3 \cdot i_3 = -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = +\frac{16}{9} \text{ absorberx potència}$$

Ara hauríem de fer el balanç i veure que la potència absorbita és igual que la lliurada.

$$P_f = P_1 + P_2 + P_3 \rightarrow 8 = \frac{8}{3} + \frac{32}{9} + \frac{16}{9} = \frac{24 + 32 + 16}{9} = \frac{72}{9} = 8$$