Departament de Disseny i Programació de Sistemes Electrònics
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Senyals i Sistemes
Problemes Tema III

Enginyeria de Sistemes TIC (iTIC)
EPSEM - UPC

Jordi Bonet Dalmau

17 de maig de 2013

1 Amplada de banda d'un senyal amb modulació FM

En aquest grup d'exercicis calcularem l'amplada de banda dels senyals obtinguts després d'una modulació FM i compararem el resultat amb les aproximacions que usualment s'usen per a modulacions de banda estreta (NBFM) i banda ampla (WBFM). Es considera l'amplada de banda d'un senyal FM com aquella amplada en la qual hi ha continguda el 98% de l'energia total del senyal. Per facilitar la tasca i disposar de resultats analítics utilitzarem com a senyal modulador $x(t)$ un senyal sinusoïdal.

Considerem el senyal modulador $x(t) = a\cos(2\pi f_x(t))$ a partir del qual tenim el senyal modulat $y(t) = A\cos(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau)\, d\tau)$, amb f_c la freqüència de la portadora sense modular i k_f la desviació de freqüència. Si calculem la integral que apareix a $y(t)$ podem escriure $y(t) = A\cos(2\pi f_c t + \beta sin(2\pi f_x t))$, amb l'índex de modulació $\beta = \frac{ak_f}{f_x}$. Si derivem la fase del cosinus que apareix a $y(t)$ obtenim la freqüència instantània $f_{inst} = f_c + ak_f \cos(2\pi f_x t)$, amb una freqüència instantània màxima $f_{max} = f_c + ak_f$ i mínima $f_{min} = f_c - ak_f$. Això ens aporta informació de quin serà l'aspecte del senyal en el domini temporal.

Però quina serà la representació espectral d'$y(t)$?

Partim d'$y(t) = A\cos(2\pi f_c t + \beta sin(2\pi f_x t))$ i ho escrivim com

$y(t) = \Re\{Ae^{j(2\pi f_c t + \beta sin(2\pi f_x t))}\} = \Re\{Ae^{j2\pi f_c t} e^{j\beta sin(2\pi f_x t)}\}$. La segona exponencial és periòdica de període $T_x = 1/f_x$ i per tant es pot escriure en funció dels coeficients de la seva sèrie de Fourier com

$e^{j\beta sin(2\pi f_x t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{j2\pi n f_x t}$, amb $c_n = \frac{1}{T_x}\int_{-T_x/2}^{T_x/2} e^{j\beta sin(2\pi f_x t)} e^{-j2\pi n f_x t}\, dt$, que amb el canvi de variable $u = f_x t$ podem escriure com $c_n = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j\beta sin(2\pi u)} e^{-j2\pi n u}\, du$. Escrit així, el coeficient c_n és una funció de Bessel de primera espècie i ordre n i podem finalment escriure els coeficients de la sèrie de Fourier de forma compacta com $c_n = J_n(\beta)$.

Si substituïm aquest resultat a $y(t) = \Re\{Ae^{j2\pi f_c t} e^{j\beta sin(2\pi f_x t)}\}$ obtenim

$y(t) = \Re\{Ae^{j2\pi f_c t} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi n f_x t}\}$. Si introduïm la primera exponencial dins el sumatori tenim $y(t) = \Re\{A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi(f_c + n f_x)t}\}$. En considerar només la part real $y(t) = A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(\beta)\cos(j2\pi(f_c + n f_x)t)$. Finalment estem en condicions d'expressar l'espectre d'$y(t)$ com $Y(f) = A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(\beta)(\delta(f - f_c - n f_x) + \delta(f + f_c + n f_x))/2$. Així, l'espectre d'una modulació FM amb un senyal sinusoïdal està fet de deltes a intervals d'f_x, la freqüència del senyal sinusoïdal, centrades a f_c, la freqüència de la portadora. El valor de la delta a la freqüència $f_c + n f_x$ és $AJ_n(\beta)/2$, amb A l'amplitud de la portadora i l'index de modulació $\beta = \frac{ak_f}{f_x}$. La propietat $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$, ens permet assegurar que el modul de l'espectre d'$Y(f)$ presenta simetria parell al voltant d'f_c.

Exercici 1.1 Calculeu i representeu gràficament l'espectre del senyal resultant de fer una modulació FM usant com a senyal modulador $x(t) = \cos(2\pi 10^3 t)$, una freqüència de portadora $f_c = 1\,\mathrm{MHz}$, una amplitud de portadora $A = 1\,\mathrm{V}$, i una desviació de freqüència $k_f = 100\,\mathrm{Hz/V}$.

Resolució L'index de modulació és $\beta = 100/1000 = 0.1$. Això ens indica que es tracta d'una modulació FM de banda estreta (NBFM). L'amplada de banda aproximada d'un senyal NBFM és $BW = 2f_x = 2\,\mathrm{kHz}$ al voltant d'f_c. Ja que l'espectre està format per deltes, és d'esperar que l'espectre es trobi concentrat a $f_c - f_x$, f_c i $f_c + f_x$, freqüències a les quals els coeficients c_{-1}, c_0 i c_1 tindran un valor elevat comparat amb la resta de coeficients c_n amb $\mid n \mid > 1$.

Això ho podem comprovar calculant els coeficients c_n per a $\mid n \mid < 4$ i verificant que els tres coeficients centrals tenen un valor molt més gran que la resta. El següent codi en Octave us pot servir d'ajut.

```
% parametres
a=1;
fx=1e3;
kf=100;
fc=1e6;

% index de modulacio
beta=a*kf/fx

% nombre de coeficients a considerar
nmax=3;
n=-nmax:nmax;

% calcul amplitud deltes
cn=besselj(n,beta);
F=fc+n*fx;

% representacio grafica
figure,
stem(F,abs(cn)),grid on
title(['fx=',num2str(fx),'; kf=',num2str(kf),'; fc=',num2str(fc)])

% resultat
[n' cn']
```

Es verifica que $c_0 = 0.9975$, $-c_{-1} = c_1 = 0.0499$ i la resta ja són com a mínim 40 cops inferiors a c_1. La *Figura* 1 mostra gràficament aquest resultat.

D'altra banda, podem calcular quina és la potència de la part de l'espectre que estem considerant. La potència mitjana d'un senyal FM es considera igual que la d'un senyal sinusoïdal: $P_{total} = 0.5\,\mathrm{W}$. La potència corresponent a cada coeficient c_n és $\mid c_n/2 \mid^2$. Si considerem la part positiva i negativa de l'espectre, la potència mitjana a $\pm(f_c + nf_x)$ és $P_n = 2 \mid c_n/2 \mid^2$. Per a calcular la potència del coeficient central P_0 i el percentatge en % respecte a la potència total $E_n = 100P_n/P_{total}$ usem

```
P0=2*abs(besselj(0,beta)/2)^2
E0=P0*100/0.5
```

Comprovem que el coeficient central concentra un 99.5% de la potència. Si considerem la potència corresponent als tres coeficients centrals, $n = \{-1, 0, 1\}$ comprovem que concentren un 99.9997% de la potència.

```
n_1a1=-1:1;
P_1a1=2*sum(abs(besselj(n_1a1,beta)/2).^2)
E_1a1=P_1a1*100/0.5
```

Amb aquest resultats podem concloure que l'amplada de banda d'un senyal NBFM és pot aproximar perfectament per $BW = 2f_x$.

Exercici 1.2 Calculeu i representeu gràficament l'espectre del senyal resultant de fer una modulació FM usant com a senyal modulador $x(t) = \cos(2\pi 10^3 t)$, una freqüència de portadora

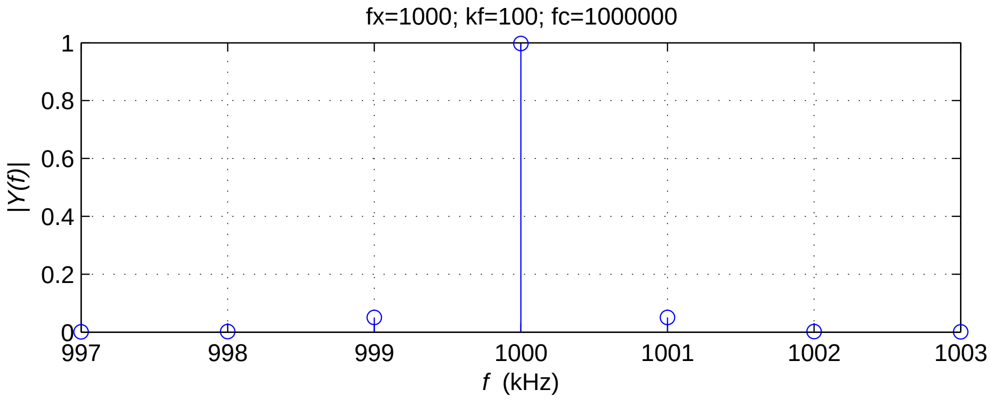

Figura 1: Espectre del senyal modulat.

$f_c = 100\,\text{MHz}$, una amplitud de portadora $A = 1\,\text{V}$, i una desviació de freqüència $k_f = 75\,\text{kHz/V}$. Calculeu l'amplada de banda que concentra un 98% de la potència.

Ajut per a la resolució L'index de modulació és $\beta = 75$. Això ens indica que es tracta d'una modulació FM de banda ampla (WBFM). L'amplada de banda d'aquest senyal WBFM és aproximadament, segons la regla de Carlson, BW$= 2(\beta + 1)f_x = 152\,\text{kHz}$ al voltant d'f_c. Verifiqueu que considerant $n = \{-75, ..., 75\}$, és a dir una amplada de banda de $150\,\text{kHz}$, la potència continguda és inferior al 98% (97.056%) i que considerant $n = \{-76, ..., 76\}$, és a dir una amplada de banda de $152\,\text{kHz}$, la potència continguda és superior al 98% (98.442%).

Exercici 1.3 Verifiqueu la validesa de la regla de Carlson per als paràmetres $f_x = 1\,\text{kHz}$, $f_c = 100\,\text{MHz}$, $A = 1\,\text{V}$, i $k_f = 37.5\,\text{kHz/V}$.

Exercici 1.4 Verifiqueu la validesa de la regla de Carlson per als paràmetres $f_x = 15\,\text{kHz}$, $f_c = 100\,\text{MHz}$, $A = 1\,\text{V}$, i $k_f = 75\,\text{kHz/V}$ corresponents a ràdio FM comercial.

2 Estratègies usades en recepció

Al llarg de la història s'han usat diferents tipus d'estratègies per tal de construir receptors capaços de recuperar la informació continguda en una portadora (*Carrier Wave*) que ha sofert una modulació AM, FM o PM. Aquests receptors es diferencien pel tipus d'amplificació i filtrat que realitzen, pel nombre de etapes o conversions de freqüència que incorporen... Podem parlar de receptor de cristall, que no incorpora cap tipus d'amplificació, de receptor de conversió directa o homodí, receptor superheterodí, de doble conversió...

EXERCICI 2.1 Considereu un senyal $x(t) = cos(2\pi f_x t)$ amb $f_x = 1\,\text{kHz}$. Aquest senyal s'usa per fer una modulació DSB amb un índex de modulació $m = 1$ d'una portadora amb $f_c = 100\,\text{kHz}$, de manera que s'obté el senyal modulat $y_{DSB} = (1 + x(t))\cos(2\pi f_c t)$. Feu una representació gràfica d'aquest senyal en el domini temporal i freqüencial.

EXERCICI 2.2 Considereu el senyal y_{DSB} de l'*Exercici* 2.1. Feu una conversió directa multiplicant el senyal y_{DSB} per un cosinus. Utilitzeu el cosinus que obtindríeu si fóssiu capaços de recuperar el senyal contingut a y_{DSB} a la freqüència f_c. Feu una representació gràfica del senyal resultat d'aquesta desmodulació, $\hat{x}(t)$, en el domini freqüencial. Afegiu el bloc necessari per recuperar el senyal original $x(t)$ amb la mateixa amplitud.

EXERCICI 2.3 Repetiu l'exercici anterior suposant que no sou capaços de recuperar el senyal contingut a y_{DSB} a la freqüència f_c. En el seu lloc useu el senyal provinent d'un oscil·lador local $m_{LO}(t) = cos(2\pi f_{OL} t)$ amb $f_{OL} = 99.9\,\text{kHz}$. Comenteu els efectes d'usar una freqüència diferent a f_c.

EXERCICI 2.4 Considereu ara el senyal de banda lateral única inferior y_{LSB} equivalent al que s'obtindria filtrant el senyal y_{DSB} de l'*Exercici* 2.1 amb un filtre ideal que eliminés el lòbul superior però mantingués la portadora i el lòbul inferior. Feu una conversió directa multiplicant el senyal y_{LSB} per un cosinus. Utilitzeu el cosinus que obtindríeu si fóssiu capaços de recuperar el senyal contingut a y_{LSB} a la freqüència f_c. Feu una representació gràfica del senyal resultat d'aquesta desmodulació, $\hat{x}(t)$, en el domini freqüencial. Afegiu el bloc necessari per recuperar el senyal original $x(t)$ amb la mateixa amplitud.

EXERCICI 2.5 Repetiu l'exercici anterior suposant que no sou capaços de recuperar el senyal contingut a y_{LSB} a la freqüència f_c. En el seu lloc useu el senyal provinent d'un oscil·lador local $m_{LO}(t) = cos(2\pi f_{OL} t)$ amb $f_{OL} = 99.9\,\text{kHz}$. Comenteu els efectes d'usar una freqüència diferent a f_c.

EXERCICI 2.6 Repetiu l'exercici anterior considerant un senyal de banda lateral única inferior amb portadora suprimida $y_{LSB,SC}$ equivalent al que s'obtindria filtrant el senyal y_{DSB} de l'*Exercici* 2.1 amb un filtre ideal que eliminés el lòbul superior i la portadora i mantingués només el lòbul inferior.

EXERCICI 2.7 Repetiu els exercicis anteriors en els que es parla de banda lateral inferior (LSB) i considereu en el seu lloc la banda lateral superior (USB).

EXERCICI 2.8 Considereu el senyal y_{LSB} de l'*Exercici* 2.4. Utilitzeu un receptor superheterodí amb una freqüència intermèdia $f_{IF} = 10\,\text{kHz}$. Considereu la inexistència de soroll per tal de relaxar les condicions de disseny dels filtres necessaris. Feu una representació del diagrama de blocs necessari per recuperar el senyal $x(t)$. Especifiqueu, en el cas dels convertidors de freqüència, la freqüència de l'oscil·l ador local i, en el cas dels filtres, el tipus i la freqüència de tall. Feu una representació gràfica de l'espectre del senyal després de cada bloc.

EXERCICI 2.9 Considereu ara el senyal $x(t)$ de la *Figura* 2 modulat en banda lateral inferior i portadora suprimida com el de la *Figura* 3. Considereu l'existència de soroll blanc en tot l'espectre. Dissenyeu un desmodulador superheterodí amb freqüència intermèdia $f_{IF} = 10.7\,\text{kHz}$. Especifiqueu amb precisió on es troba la freqüència imatge.

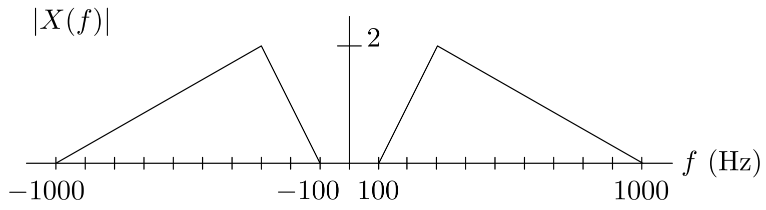

Figura 2: Mòdul de la TF de $x(t)$.

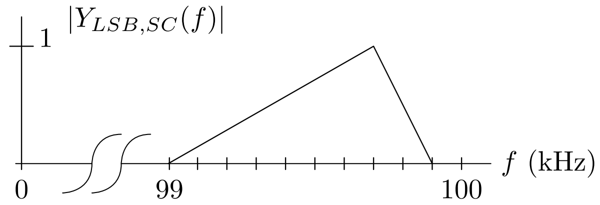

Figura 3: Mòdul de la TF de $y_{LSB,SC}(t)$.

EXERCICI 2.10 Repetiu l'exercici anterior considerant que el vostre primer convertidor de freqüència no és un multiplicador per un senyal sinusoïdal $m_{LO}(t) = cos(2\pi f_{OL} t)$, sinó un multiplicador per un senyal periòdic de freqüència f_{OL} amb els coeficients de la seva sèrie exponencial de Fourier $c_0 = 0.5$, $c_1 = 1/\pi$ i $c_3 = -1/3\pi$.

3 Mostreig de senyals

EXERCICI 3.1 Considereu el senyal $x(t)$ de la *Figura* 2. Feu una representació en el domini freqüencial del senyal $x_s(t)$ resultant de mostrejar $x(t)$ fent una multiplicació d'$x(t)$ amb un senyal quadrat d'amplitud 0 i 1, un rendiment de cicle del 50% i una freqüència $f_s = 3\,\mathrm{kHz}$. Com recuperaríeu $x(t)$ a partir d'$x_s(t)$? Especifiqueu el tipus de filtre, la freqüència de tall i l'ordre si volem atenuar el primer *alias* un mínim de 12dB.

EXERCICI 3.2 Repetiu l'exercici anterior considerant $f_s = 1.2\,\mathrm{kHz}$. Podeu recuperar $x(t)$ a partir d'$x_s(t)$?