



Senyals i Sistemes

Problemes Tema II

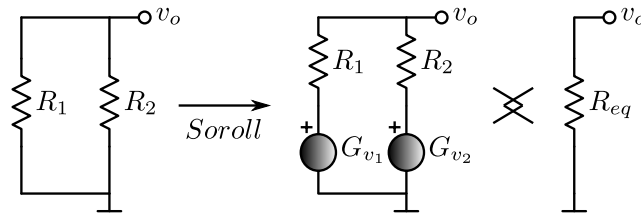
Enginyeria de Sistemes TIC (iTIC)
EPSEM - UPC

Jordi Bonet Dalmau

7 de gener de 2016

1 Soroll tèrmic. Densitat espectral de potència.

EXERCICI 1.1 La densitat espectral de potència d'una impedància amb part real $R(f)$ és $G_v(f) = 2kTR(f)$ W Ω /Hz. Podem saber la densitat espectral de potència $G_{v_o}(f)$ que aquesta impedància genera en un determinat node del circuit v_o a partir de la funció de xarxa $H(f)$ que relaciona les tensions entre els nodes v_o i el node on tenim $G_v(f)$: $G_{v_o}(f) = G_v(f) |H(f)|^2$. Useu aquest resultat per a calcular $G_{v_o}(f)$ en el circuit inferior, en el qual tenim dues resistències en paral·lel. Compareu $G_{v_o}(f)$ amb la densitat espectral de potència d'una resistència $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.



2 Càlcul de l'amplada de banda equivalent de soroll d'un filtre

Es defineix l'amplada de banda equivalent de soroll B_N d'un filtre pas-baix $H(f)$ com aquella amplada d'un filtre rectangular $\Pi(\frac{f}{2B_N})$ d'amplitud la màxima del filtre, H_{max} , que deixa passar la mateixa potència de soroll blanc que el filtre. Es compleix que $B_N H_{max}^2 = \int_0^\infty |H(f)|^2 df$.

EXERCICI 2.1 Calculeu l'amplada de banda equivalent de soroll B_N d'un filtre de Butterworth de primer ordre, per exemple un RC , amb una amplada de banda a -3 dB B : $|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(f/B)^2}$. Calculeu la integral de forma numèrica usant **Octave**.

EXERCICI 2.2 Calculeu l'amplada de banda equivalent de soroll B_N d'un filtre de Butterworth de segon ordre, per exemple el prototipus de pas-baix de segon ordre amb el paràmetre $\xi = 1/\sqrt{2}$, amb una amplada de banda a -3 dB B : $|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(f/B)^4}$. Calculeu la integral de forma numèrica usant **Octave**.

EXERCICI 2.3 Calculeu l'amplada de banda equivalent de soroll B_N d'un filtre de Butterworth de tercer ordre, per exemple el prototipus de pas-baix de segon ordre amb el paràmetre $\xi = 1/2$ seguit d'un RC , amb una amplada de banda a -3 dB B : $|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(f/B)^6}$. Calculeu la integral de forma numèrica usant **Octave**.

EXERCICI 2.4 Calculeu l'amplada de banda equivalent de soroll B_N d'un filtre de Butterworth de quart ordre, per exemple un primer prototipus de pas-baix de segon ordre amb el paràmetre $\xi_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ seguit d'un segon prototipus de pas-baix de segon ordre amb el paràmetre $\xi_2 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ amb una amplada de banda a -3 dB B : $|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(f/B)^8}$. Calculeu la integral de forma numèrica usant **Octave**.

3 Relació senyal soroll (SNR)

En els següents exercicis calcularem la relació senyal a soroll SNR que apareix a la sortida dels filtres estudiats anteriorment quan a la seva entrada tenim un senyal de veu superposat a un senyal blanc. La [Figura 1](#) mostra una simplificació de la densitat espectral de potència del senyal de veu d'un locutor de ràdio, amb un màxim de 1 mW/Hz a 200 Hz. La [Figura 2](#) mostra la densitat espectral de potència d'un soroll blanc de valor 0.25 mW/Hz. El canal és molt sorollós.

El procediment habitual per a calcular la SNR a la sortida d'un filtre $H(f)$ quan coneixem les densitats espectrals de potència del senyal i del soroll és calcular $SNR = \frac{\int_0^\infty |H(f)|^2 G_s(f) df}{\int_0^\infty |H(f)|^2 G_n(f) df}$ ¹. Aquesta expressió es pot simplificar quan tractem amb soroll blanc de densitat espectral de potència $G_n(f) = N_0$ i coneixem l'amplada de banda equivalent de soroll del filtre B_N : $SNR = \frac{\int_0^\infty |H(f)|^2 G_s(f) df}{N_0 B_N |H_{max}|^2}$, amb $|H_{max}|$ l'amplitud màxima del filtre. En el cas dels pas-baix que estudiarem aquest valor és 1. Així, l'expressió simplificada es redueix a $SNR = \frac{\int_0^\infty |H(f)|^2 G_s(f) df}{N_0 B_N}$. A més, també es habitual considerar que l'amplitud del filtre en la banda de pas, entre 0 Hz i l'amplada de banda a -3 dB B per a un pas-baix, és constant (i igual a 1). En aquest cas, l'expressió anterior es pot aproximar per $SNR \simeq SNR_{approx} = \frac{\int_0^B G_s(f) df}{N_0 B_N}$. En els següents exercicis, també valorarem la validesa d'aquesta aproximació.

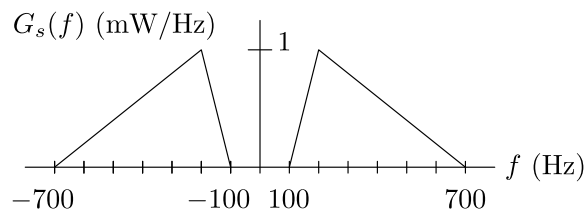


Figura 1: Densitat espectral de potència d'un senyal de veu.

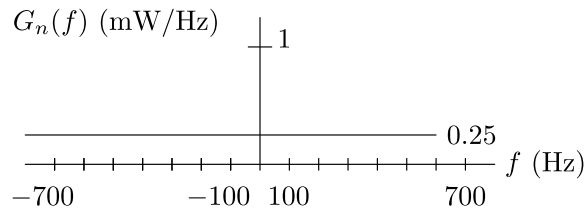


Figura 2: Densitat espectral de potència d'un soroll blanc.

EXERCICI 3.1 Calculeu la potència mitjana del senyal, P_s .

EXERCICI 3.2 Calculeu la màxima SNR que es podria aconseguir, sense perdre senyal, usant un filtre pas-banda ideal entre 100 Hz i 700 Hz.

EXERCICI 3.3 Calculeu la SNR quan usem un filtre pas-baix de Butterworth de primer ordre, amb $|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(f/B)^2}$ i una amplada de banda a -3 dB $B = 700$ Hz. No realitzeu cap

¹Les funcions densitat espectral de potència són parells i per això la integral comença a zero i no a $-\infty$.

simplificació i tingueu en compte que el senyal es veu lleugerament atenuat pel filtre, essent la màxima atenuació de -3 dB a 700 Hz. Calculeu la integral de forma numèrica usant **Octave**.

EXERCICI 3.4 Calculeu la SNR_{approx} per al filtre de l'exercici anterior. Considereu que l'amplitud el filtre és constant en tota la banda de pas. Calculeu la integral que apareix analíticament. Quin és l'error en dB introduït per l'aproximació?

EXERCICI 3.5 Repetiu el càlcul de la SNR i la SNR_{approx} per a un filtre de Butterworth de segon ordre, amb $|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(f/B)^4}$. Quin és l'error en dB introduït per l'aproximació?

EXERCICI 3.6 Repetiu el càlcul de la SNR i la SNR_{approx} per a un filtre de Butterworth de tercer ordre, amb $|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(f/B)^6}$. Quin és l'error en dB introduït per l'aproximació?

EXERCICI 3.7 Repetiu el càlcul de la SNR i la SNR_{approx} per a un filtre de Butterworth de quart ordre, amb $|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(f/B)^8}$. Quin és l'error en dB introduït per l'aproximació?

4 Formula de Friis

La fórmula de Friis ens permet relacionar el factor de soroll equivalent de varis biports en cascada amb el factor de soroll de cada biport, sempre que es compleixin determinades condicions d'adaptació d'impedància i amplada de banda de cada biport. Si considerem l'existència d' N biports ordenats de forma creixent amb un guany G_n i un factor de soroll F_n , el factor de soroll equivalent és $F = F_1 + \frac{F_2-1}{G_1} + \frac{F_3-1}{G_1G_2} + \dots + \frac{F_N-1}{G_1 \dots G_{N-1}}$ i el guany equivalent és $G = G_1G_2 \dots G_N$ (G_n en escala lineal).

EXERCICI 4.1 Considereu que disposeu de dos amplificadors amb un guany $G_1 = 10$ i $G_2 = 10$ i un factor de soroll $F_1 = 1.2$ i $F_2 = 1.3$. Escolliu l'ordre que aconseguieu minimitzar el factor de soroll equivalent i calculeu el seu valor.

EXERCICI 4.2 Considereu que disposeu de dos amplificadors amb un guany $G_1 = 2$ i $G_2 = 10$ i un factor de soroll $F_1 = 1.2$ i $F_2 = 1.3$. Escolliu l'ordre que aconseguieu minimitzar el factor de soroll equivalent i calculeu el seu valor.

EXERCICI 4.3 Considereu que disposeu de tres amplificadors amb un guany $G_1 = 4$, $G_2 = 10$ i $G_3 = 100$ i un factor de soroll $F_1 = 1.2$, $F_2 = 1.22$ i $F_3 = 2$. Escolliu l'ordre que aconseguieu minimitzar el factor de soroll equivalent i calculeu el seu valor.