Departament de Disseny i Programació de Sistemes Electrònics
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Moving average filter

Frequency response

Jordi Bonet i Dalmau

28 d'octubre de 2019

Aquesta sessió ens permetrà treballar amb un filtre digital i calcular la seva resposta en freqüència. Aquest treball es veu facilitat amb l'ús de la transformada Z. Malgrat això, en aquest moment del curs no dominem aquesta eina de manera que escollirem un filtre que ens permeti obtenir resultats sense grans dificultats, evitant l'ús de la transformada Z.

Aquest és el filtre de mitjana mòbil (MM). Aquesta és la forma més simple d'implementar un filtre pas-baix digital. Consisteix en fer la mitjana de la mostra actual i les m anteriors de la següent forma:

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + \cdots + x(n-m)}{m+1} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{k=m} x(n-k) \tag{1}$$

Observeu que el filtre de MM només té un paràmetre: m. En les següents seccions estudiarem com es comporta aquest filtre quan a l'entrada tenim les mostres $x(n)$ d'un senyal sinusoïdal.

1 Sinusoidal steady-state response

Si ens centrem en un senyal sinusoïdal, $x_a(t) = cos(2\pi F_a t + \phi)$, podem afirmar que la mitjana de $m+1$ mostres d'un senyal de freqüència F_a *baixa* valdrà aproximadament el mateix que el senyal sense filtrar, ja que les $m+1$ mostres valdran aproximadament igual. De la mateixa manera, podem afirmar que la mitjana de $m+1$ mostres d'un senyal de freqüència F_a *alta* valdrà aproximadament zero, ja que les $m+1$ mostres agafaran tots els possibles valors d'un període i la seva mitjana serà propera a zero.

Aquestes afirmacions fan vàries suposicions i s'han de fer amb molta cura. Per exemple, és clar que un mateix filtre es comportarà molt diferent davant un mateix senyal de freqüència F_a en funció de la freqüència de mostreig F_s i el paràmetre m.

Un altre enfocament que prescindeix del domini analògic consisteix en considerar com actua el filtre davant un senyal sinusoïdal discret, $x(n) = cos(2\pi f n + \phi)$. En aquest cas la freqüència del senyal discret f (cicles/mostra) està relacionada amb la freqüència del senyal analògic F_a (cicles/s) i la freqüència de mostreig F_s (mostres/s) com $f = \frac{F_a}{F_s}$.

Tasca 1. Realitzeu un programa en Octave que reprodueixi el comportament d'un filtre de MM.

1. Considereu un filtre de paràmetre m i una freqüència de mostreig F_s.

```
m=30;
Fs=48e3;
```

2. Considereu com a entrada $x(n)$ les mostres d'un senyal sinusoïdal de freqüència F_a i durada nT períodes.

```
Fa=1e3;
nT=6;
N=round(Fs*nT/Fa);%nombre de mostres contingudes en nT periodes
t=[1/Fs:1/Fs:N/Fs];
x=sin(2*pi*Fa*t);
```

3. Calculeu la sortida $y(n)$ obtinguda filtrant $x(n)$ amb el filtre definit a (1). Observeu que existirà un transitori a l'inici (per $1 \leq n < m+1$, considereu la primera mostra a $n = 1$) i al final del senyal, el qual no existiria si l'excitació sinusoïdal $x(n)$ fos de durada infinita. Proveu diferents algorismes evitant o minimitzant la mida dels bucles. Considereu també l'obtenció de la sortida com a convolució de l'entrada amb la resposta impulsional (algorisme 3): $y(n) = x(n) * h(n)$. Calculeu el temps de càlcul de cada algorisme amb

```
% algorisme 1
tic
...
toc

% algorisme 2
tic
...
toc
% algorisme 3
tic
h=ones(1,m+1);
y=conv(x,h)/(m+1);
y=y(1:length(x));
toc
```

4. Feu una representació dels senyals $x(n)$ i $y(n)$.

5. Finalment calculeu l'atenuació introduïda pel filtre a partir de l'amplitud en règim permanent. Aquest càlcul en un primer moment pot ser visual a partir de la gràfica anterior, però després ha de ser automatitzat i pot aparèixer en la mateixa gràfica.

```
plot(t,x,t,y),legend('x','y'),
title(['Atenuacio=',num2str(valor_dB),' dB'])
```

Resultats per a verificar el codi

Amb els valors $F_s = 48\,\text{kSa/s}$, $F_a = 1\,\text{kHz}$ i $m = 30$ hauríeu d'obtenir un senyal $y(n)$ amb una amplitud de pic en règim permanent de 0.44235 (Atenuació=7.0846 dB).

Comparativa del temps de càlcul de cada algorisme

Feu les modificacions necessàries per tal d'automatitzar el temps de càlcul de cadascun dels tres algorismes proposats per a totes les combinacions possibles d'`m=[10 20 40 80]` i `N=[1e3, 1e4, 1e5, 1e6]`.

Es valorarà:

1. Funcionament del programa

2. Comprensibilitat del programa
3. Eficiència computacional de l'algoritme usat per implementar el filtrat
4. Discriminació entre el transitori i el règim permanent:
5. Automatització del càlcul de l'atenuació del filtre

2 Filter design: $m_{-3\mathrm{dB}}$

En la secció anterior hem resolt el problema d'anàlisi consistent en calcular el guany (o atenuació) introduït per un filtre de MM de paràmetre m davant un senyal amb $f = \frac{F_a}{F_s}$. En aquesta secció considerarem un problema de disseny: quin és el valor del paràmetre m d'un filtre de MM que amplifica (o atenua) un determinat valor un senyal amb $f = \frac{F_a}{F_s}$? Es tracta de trobar un filtre que compleixi unes determinades especificacions. En concret buscarem el mínim valor d'm que tingui un guany inferior a $-3\,\mathrm{dB}$. A aquest valor n'hi direm $m_{-3\,\mathrm{dB}}$.

Tasca 2. Modifiqueu el programa en Octave de la secció anterior per tal de fer un escombrat sobre el paràmetre m que us permeti trobar $m_{-3\,\mathrm{dB}}$.

1. Considereu un bucle en el qual a cada nova iteració augmenta el valor d'm. La primera iteració pot estar inicialitzada amb $m = 0$, és a dir $y(n) = x(n)$.
2. Per a cada valor d'm heu de calcular el guany. Quan aquest guany sigui el desitjat heu d'aturar el bucle.
3. Podeu implementar el bucle amb un **while**, **do** ... **until** o amb un **for** ... **end** que es pot aturar amb un *break*:

```
...
if guany<-3, break, end
...
```

4. No oblideu que per tal de calcular correctament l'atenuació cal disposar de com a mínim un període del règim permanent. Per tant, cal que la longitud d'N sigui igual a la durada del transitori (m) més les mostres d'un període del senyal d'entrada (F_s/F_a). A la pràctica sigueu conservadors i agafeu uns quants períodes del règim permanent.

Resultats per a verificar el codi
Amb els valors $F_s = 48\,\mathrm{kSa/s}$ i $F_a = 1\,\mathrm{kHz}$ hauríeu d'obtenir $m_{-3\,\mathrm{dB}} = 21$ (Atenuació=3.2537 dB). Amb $F_s = 96\,\mathrm{kSa/s}$ i $F_a = 1.2\,\mathrm{kHz}$ hauríeu d'obtenir $m_{-3\,\mathrm{dB}} = 35$ (Atenuació=3.1193 dB). Compareu els resultats amb les següents aproximacions d'$m_{-3\,\mathrm{dB}}$: $m_{-3\,\mathrm{dB}\ aprox1} = 0.44167/f$ i $m_{-3\,\mathrm{dB}\ aprox2} = (0.46/f) - 1$.

En relació als $-3\,\mathrm{dB}$

a. Es considera el valor d'un paràmetre a $-3\,\mathrm{dB}$ aquell que fa que la potència d'un senyal sigui la meitat que una potència de referència.

b. En el nostre cas: aquell que fa que la potència P_y del senyal de sortida, y, sigui la meitat que la potència P_x del senyal d'entrada, x.

c. Aquest criteri expressat en dB és: $10\log_{10}(P_y/P_x) = 10\log_{10}(1/2) \simeq -3\,\text{dB}$

d. Quan parlem de potència mitjana i de senyals sinusoïdals, la potència és proporcional al quadrat de l'amplitud del senyal: $P_y = y_{ef}^2$ o $P_y = y_p^2/2$, on y_{ef} és l'amplitud eficaç i y_p és l'amplitud de pic.

e. Així el criteri anterior es pot reescriure com: $10\log_{10}(y_p^2/x_p^2) = 20\log_{10}(y_p/x_p) = 20\log_{10}(1/\sqrt{2}) \simeq -3\,\text{dB}$

f. Si l'amplitud de pic del senyal d'entrada és 1 ($x_p = 1$), aleshores $20\log_{10}(y_p) \simeq -3\,\text{dB}$ i, per tant, $y_p = 1/\sqrt{2} \simeq 0.7$

3 Frequency response: $F_{-3\text{dB}}$

Finalment, en aquesta secció determinarem la resposta en freqüència d'un filtre determinat. Així, farem un escombrat en freqüència F_a per a una determinada F_s i un filtre de MM amb paràmetre m determinat. Durant la realització d'aquest escombrat determinarem la freqüència a la qual el guany és inferior a $-3\,\text{dB}$. A aquest valor n'hi direm $F_{-3\,\text{dB}}$ si ens referim a F_a o $f_{-3\,\text{dB}}$ si ens referim a f.

Tasca 3. Modifiqueu el programa en Octave de la secció anterior per tal de fer un escombrat sobre el paràmetre F_a que us permeti trobar la resposta en freqüència i, en concret, $F_{-3\,\text{dB}}$.

1. Considereu un bucle en el qual a cada nova iteració augmenta el valor d'F_a. La primera iteració pot estar inicialitzada amb $F_a = 100$ i no cal que vagi més enllà d'$F_s/2$.

2. Per a cada valor d'F_a heu de calcular el guany.

3. En finalitzar l'escombrat heu de disposar de dos vectors: un de freqüència F i un altre de guany G. Heu de fer la representació del guany en dB en funció de la freqüència en escala logarítmica.

4. Podeu comparar la resposta en freqüència obtinguda amb l'expressió analítica que obtindríem amb l'ús de la transformada Z que tot just hem presentat a classe.

$$\mid H(e^{j\omega_0}) \mid = \frac{1}{m+1} \frac{\mid \sin\left(\omega_0\left(m+1\right)/2\right) \mid}{\sin\left(\omega_0/2\right)}, \tag{2}$$

   amb

$$\omega_0 = 2\pi f = 2\pi \frac{F_a}{F_s}. \tag{3}$$

   En cas d'observar discrepàncies per a alguns punts, considereu la possibilitat de treballar amb una F_a que no sigui submúltiple d'F_s: per exemple $F_a = 1\,\text{kHz}+\pi\text{Hz}$ si $F_s = 48\,\text{kHz}$.

Resultats per a verificar el codi
Amb els valors $F_s = 48\,\text{kHz}$ i $m = 10$ hauríeu d'obtenir $F_{-3\,\text{dB}} \simeq 1940\,\text{Hz}$.

Tasca 4. En la gràfica de resposta en freqüència haureu observat que per a determinades freqüències l'atenuació és pràcticament infinita. Per a quins valors d'F_a la sortida $y(n)$ és zero? Determineu l'expressió en funció d'm i F_s.

4 Applications

Anem a aplicar els resultats de les seccions anteriors.

Tasca 5. Enregistreu un senyal de veu x de durada 2 o 3 segons usant $F_s = 48\,\mathrm{kHz}$. Dissenyeu un filtre de MM amb $F_{-3\,\mathrm{dB}} \simeq 500\,\mathrm{Hz}$. Compareu el senyal original x amb el senyal filtrat y. Proveu altres valors d'$F_{-3\,\mathrm{dB}}$. Anoteu conclusions sobre els canvis (intel·ligibilitat, intensitat, to timbre...) en el senyal a diferents $F_{-3\,\mathrm{dB}}$.

Tasca 6. Afegiu al senyal anterior x un to sinusoïdal s d'amplitud 0.05 i freqüència $F_i = 4.8\,\mathrm{kHz}$: $x_2 = x + s$. Dissenyeu un filtre de MM que en ser aplicat al senyal x_2 elimini totalment el to interferent s al temps que limita la distorsió d'x en base als resultats de la tasca anterior. Compareu el senyal original x amb x_2 i amb el senyal filtrat y. Repetiu per a $F_i = 10\,\mathrm{kHz}$. Podríeu fer-ho per a $F_i = 10.1234\,\mathrm{kHz}$? Què proposeu?