



Processament Digital del Senyal

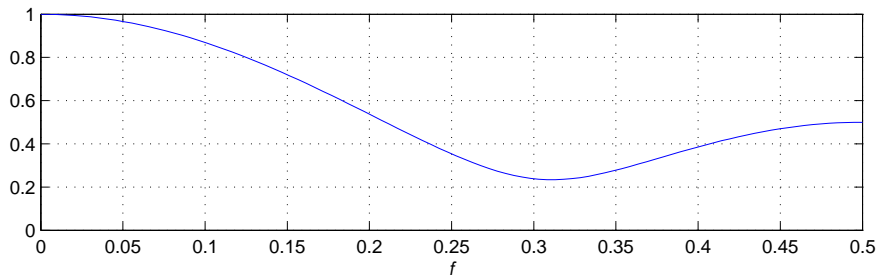
Prova Final. 11 de gener de 2016

Temps per a la resolució: 4 hores. Publicació de resultats: 29 de gener.

1 Exercicis curts

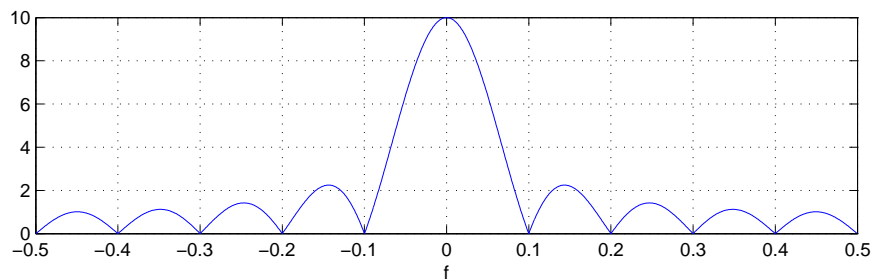
- Determineu la funció de transferència $H(z)$, estudeu l'estabilitat i feu la implementació (usant la forma directa I) del següent sistema: $y(n) = y(n-1) + 2y(n-2) + x(n) + 2x(n-1)$.
- Per a un sistema definit per $H(z) = \frac{5-(13/6)z^{-1}}{1-(5/6)z^{-1}+(1/6)z^{-2}}$
 - Calculeu la resposta $h(n)$ a l'impuls $\delta(n)$.
 - Calculeu la resposta $y(n)$ al graó $u(n)$.
 - Feu una representació gràfica de les dues respostes per $0 \leq n \leq 3$.
 - Implementeu $H(z)$ usant la forma directa I.
- Disposeu d'un sensor de temperatura amb una sensibilitat de $10 \text{ mV}/^\circ\text{C}$. Voleu mesurar un rang de temperatura de 0 a 100°C . Si useu un convertidor A/D de 8 bits i un rang de 0 a 3.3 V ,
 - Quina serà la resolució en temperatura que tindreu?
 - Com ho faríeu per tenir una resolució d'exactament 1°C ?
- Considereu un senyal analògic $x_a(t)$ amb una amplada de banda $B = 10 \text{ kHz}$ que ha patit una modulació d'amplitud en banda lateral superior (AM-USB) amb una portadora $F_c = 71.111111 \text{ kHz}$. Considereu la desmodulació directa d'aquest senyal usant submostratge.
 - Determineu totes les possibles freqüències de mostreig F_s que podríeu usar.
 - Considereu la implementació de la conversió directa amb un microcontrolador (ATmega328P de l'Arduino Uno) que mostreja cada cop que s'activa la interrupció del TMR0 (8bits). Si el microcontrolador usa $F_{clk} = 16 \text{ MHz}$, amb quins valors configurariéu (si es possible) el TMR0 per a cadascuna de les F_s anteriors?
 - De totes les F_s anteriors quina/quines usariéu si existís un senyal interferent a $F_i = 30 \text{ kHz}$?
- Considereu el filtre caracteritzat per $H(z) = (1 - 0.9z^{-1})/(1 - 0.25z^{-2})$. Calculeu la sortida $y(n)$ en RPS per a l'entrada $x(n)$ provinent de la discretització de $x_a(t) = \cos(2\pi 2600t)u(t)$ usant $F_s = 10 \text{ kHz}$ i $F_s = 6.3 \text{ kHz}$.

6. Considereu un filtre amb el mòdul d' $H(e^{j2\pi f})$ representat a la figura.



Calculeu la sortida $y(n)$ en RPS per a l'entrada $x(n)$ que prové de la discretització de $x_a(t) = (0.5 + \cos(4398t) + 2\cos(6597t) + 3\cos(13195t))u(t)$ usant $F_s = 7$ kHz.

7. Voleu determinar la presència de dos tons de freqüència $F_a = 1 \text{ MHz} \pm 1 \text{ kHz}$ en un senyal $x_a(t)$ a partir de la DFT d'aquest senyal discretitzat. Indica amb detall el procés per determinar l'existència d'aquests tons.
8. Voleu determinar la presència de dos tons de freqüència $F_1 = 1.2 \text{ kHz}$ i $F_2 = 2.2 \text{ kHz}$ en un senyal $x_a(t)$ a partir de la DFT d'aquest senyal discretitzat. Indica amb detall el procés per determinar l'existència d'aquests tons.
9. Mostregeu el senyal $x_a(t) = 3\cos(2\pi 10^3 t)$ a $F_s = 50 \text{ kHz}$ durant 5 ms. Indiqueu el valor de les components de la DFT del senyal discretitzat? Què passaria si mostregéssiu durant 5.1 ms?
10. La transformada de Fourier de la discretització $x(n)$ d'un pols unitari de durada $10 \mu\text{s}$ mostrejat a $F_s = 1 \text{ MHz}$ té el mòdul de la figura.



A partir de la figura indiqueu els valors de les components de la DFT d' $x(n)$ si observem el pols durant $t_{obs} = 10 \mu\text{s}$. I si $t_{obs} = 20 \mu\text{s}$?

11. Comenteu la eficiència computacional dels algorismes existents per a calcular la DFT.

2 Avoiding the noise that comes from aliasing in an ADC

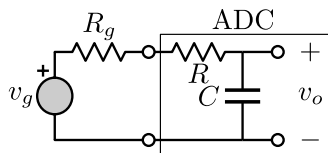
Quan es tria la freqüència de mostreig F_s d'un convertidor analògic-digital (ADC) que s'ha d'usar per mostrejar un senyal amb una amplada de banda B sovint només es pensa en complir el teorema de Nyquist, $F_s > 2B$. El compliment d'aquest teorema evita un solapament de l'espectre del senyal que s'anomena *aliasing*. Allò que no s'evita, però, és un solapament del soroll existent més enllà de l'amplada de banda del senyal i que se suma a l'existent fins a $F_s/2$. Dues estratègies usades, per separat o conjuntament, per evitar aquest efecte són afegir un filtre pas baix (també conegut com filtre *anti-aliasing*) i sobremostrejar el senyal (usant $F_s \gg 2B$). Al laboratori rarament hem usat un filtre pas-baix per eliminar el soroll existent més enllà de B .

Anem a comparar la relació senyal/soroll (SNR) amb i sense l'ús d'un filtre RC (el més senzill dels filtres pas-baix) davant l'existència de soroll. Recordareu de *Senyals i Sistemes* que

- Un tipus de soroll és el blanc, caracteritzat per una densitat espectral de potència N_0 ¹ a totes les freqüències.
- L'amplada de banda equivalent de soroll d'un filtre RC és $B_N = 1/(4RC)$ Hz.
- La potència de soroll després del filtre és $N_a = N_0 B_N$.

Així mateix, per calcular la SNR heu de considerar no només el soroll N_a que acompanya el senyal abans de l'ADC sinó també el soroll de quantificació després de la quantificació², que en un ADC de b bits i rang dinàmic D_r es pot aproximar per $N_q = D_r^2/(12 \cdot 2^{2b})$.

En primer lloc considereu que el senyal v_g es connecta directament a l'ADC. Una amplada de banda infinita implicaria una potència de soroll infinita, però a la pràctica hem de considerar la circuiteria interna de l'ADC que el cas del microcontrolador ATmega328P de l'Arduino Uno inclou un multiplexor i un bloc *sample & hold* que es poden modelar com un RC tal i com s'indica a la figura, amb la qual cosa el soroll ja no té un amplada de banda infinita.



En endavant considereu $N_0 = 10^{-12}$, $R_g = 50 \Omega$, v_g un senyal sinusoidal amb una amplitud de pic a pic d'1 V i una freqüència $F_a = 1$ kHz, i un ADC amb $b = 10$ i $D_r = 1.1$ V. Els resultats d'SNR indiqueu-los en dB.

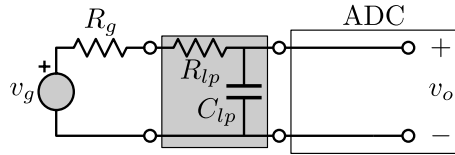
- Calculeu la freqüència de tall F_c de l'RC pel qual es veu filtrat v_g . Considereu $R = 20 \text{ k}\Omega$ ³ i $C = 14 \text{ pF}$. Quina és la màxima freqüència que pot tenir el senyal v_g abans de ser distorsionat?
- Calculeu $\text{SNR}_a = S/N_a$ a v_o , $\text{SNR}_q = S/N_q$ després de la quantificació de v_o (considerant la inexistència de soroll blanc: $N_a = 0$) i, finalment, $\text{SNR} = S/(N_a + N_q)$ després de la quantificació de v_o .

En segon lloc considereu que poseu un filtre pas-baix a l'entrada de l'ADC amb una F_c molt inferior a la calculada a l'apartat a). En aquest cas, el filtre a l'entrada permet aproximar la impedància d'entrada de l'ADC per un circuit obert tal i com es mostra a la figura.

¹ N_0 té unitats de volt^2/Hz .

²En realitat també caldria considerar el soroll tèrmic de les resistències, $N_{0R} = 4KTR$ que un cop filtrat per un RC seria $N_R = KT/C$ però considerarem $N_{0R} \ll N_0$.

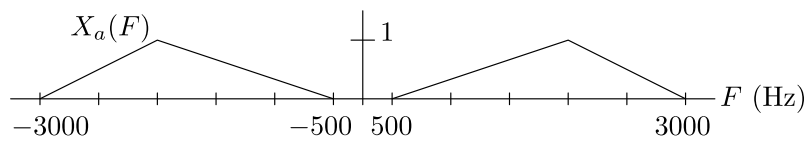
³En el microcontrolador ATmega328P R pot anar d'1 k Ω a 100 k Ω .



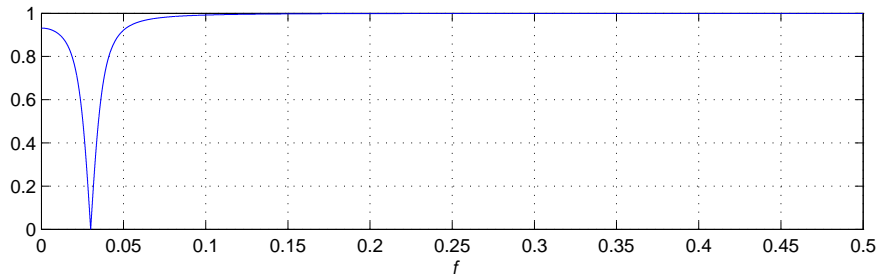
- Calculeu el valor de C_{lp} que permet tenir un filtre amb $F_c = 2$ kHz. Considereu $R_{lp} = 10$ k Ω .
- Repetiu el càlcul de SNR_a , SNR_q i SNR . Canviaran significativament els resultats en doblar o dividir per dos la F_c ?
- Què podeu dir sobre la necessitat o no d'incorporar un filtre RC a l'entrada de l'ADC?

3 Adjusting the sampling frequency to match a filter

Considereu un senyal de veu $x_a(t)$ originalment amb el següent espectre



al qual accidentalment se li ha afegit un senyal interferent situat a $F_{int} = 300$ Hz. A la suma d' x_a i el senyal interferent en direm x_{a+i} . Disposeu d'un dispositiu digital amb un convertidor AD i DA (que podeu considerar ideals) en el qual el vostre company de grup ha implementat un filtre banda-eliminada amb el mòdul d' $H(e^{j2\pi f})$ representat a la figura.



Observeu que el zero es troba a la freqüència discreta $f = 0.03$. D'aquest dispositiu només podeu modificar la freqüència de mostreig F_s .

- Escolliu adequadament la freqüència F_s per tal d'utilitzar el dispositiu digital per a mostrejar el senyal $x_{a+i}(t)$, eliminar el senyal interferent i tornar a obtenir un senyal analògic $y_a(t)$ a poder ésser amb el mateix espectre que el d' $x_a(t)$.

Malauradament el vostre company de grup ha comès un error en la implementació del filtre. Vosaltres l'heu detectat i sabeu que realment el filtre banda-eliminada té un zero a la freqüència discreta $f = 0.06$. Enlloc de demanar-li que rectifiqui l'error (només ell pot modificar el dispositiu) us proposeu prescindir del seu ajut i buscar una altra solució.

- Escolliu novament la freqüència F_s que permet eliminar el senyal interferent.
- Quin és l'espectre del senyal $y_a(t)$ obtingut amb aquesta nova freqüència F_s ?
- Caldrà que el vostre company rectifiqui l'error?