

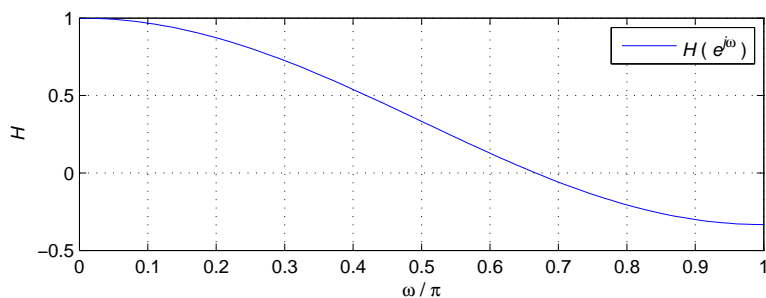
Processament Digital del Senyal

Prova Final. 24 de gener de 2013

Temps per a la resolució: 4 hores. Darrer dia revisió: 1 de febrer

1 Exercicis curts

- Un senyal $x(n)$ es vol quantificar adequadament per tal de tenir una resolució de 60 mV. Quants bits ha de tenir el convertidor A/D i quina és la resolució obtinguda en els següents casos?
 - El convertidor A/D té un rang dinàmic de 0 a 5 V.
 - El convertidor A/D té un rang dinàmic de 0 a 3.3 V.
- Considereu el senyal $x_a(t) = 1.65 + \cos(2\pi 10^3 t)$ mostrejat a $F_m = 10$ kHz amb un convertidor A/D de 8 bits i un rang dinàmic de 0 a 3.3 V.
 - Escriviu el senyal discretitzat $x(n)$ i i estudeu-ne la seva periodicitat.
 - Quina és la resolució del convertidor A/D?
 - Com millorarà la resolució si adaptem el senyal d'entrada al rang dinàmic del convertidor A/D.
- Estudieu les propietats de linealitat, variància amb el temps i causalitat dels següents sistemes.
 - $y(n) = x(n + 1)$
 - $y(n) = nx(n)$
- Calculeu la funció de transferència $H(z)$ i estudeu l'estabilitat dels següents sistemes
 - $y(n) = x(n) + 0.5x(n - 20)$
 - $y(n) = x(n) - 0.5y(n - 20)$
- Per a un sistema definit per $H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}}$.
 - Calculeu la resposta a l'impuls $\delta(n)$
 - Calculeu la resposta al graó $u(n)$.
- Considereu el filtre de mitjana mòbil $y(n) = (x(n - 1) + x(n) + x(n + 1))/3$ amb la $H(e^{j\omega})$ representada a la figura

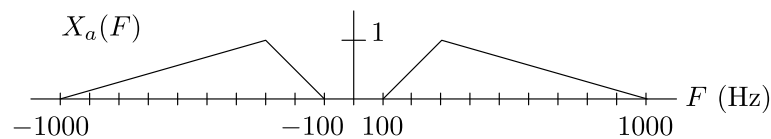


obtinguda executant el següent codi en Octave.

```
%% Resposta en freqüència d'un filtre
w=linspace(0,pi);
z=exp(j*w);
H=(z.^-1+1+z.^1)/3;
plot(w/pi,H), grid on
```

Calculeu la sortida $y(n)$ en RPS per a l'entrada $x(n) = (1 + \cos(2\pi 0.1n) + 2 \cos(2\pi 0.33n) + 3 \cos(2\pi 0.5n))u(n)$.

7. Calculeu la sortida $y(n)$ en RPS del filtre de l'exercici anterior quan $x(n)$ prové de la discretització de $x_a(t) = (1 + \cos(2\pi 10^3 t) + \cos(2\pi 2 \cdot 10^3 t) + \cos(2\pi 3 \cdot 10^3 t))u(t)$, usant $F_m = 10$ kHz.
8. Dissenyau un filtre banda eliminada amb dos zeros a ω_0 i dos pols de modul r .
9. Quin codi escriuríeu en Octave per a fer una representació gràfica del filtre banda eliminada de l'exercici anterior?
10. Considereu un senyal $x_a(t)$ amb la TF $X_a(F)$ de la figura. Si mostregem aquest senyal a F_m i després enviem les mostres a un convertidor D/A ideal, obtenim un nou senyal $y(t)$. Quin serà l'espectre d' $y(t)$ per als següents valor d' F_m ?
 - a) $F_m = 3$ kHz.
 - b) $F_m = 1.3$ kHz.



11. Considereu un senyal $x_a(t) = \cos(2\pi 54 \cdot 10^3 t)$. Si mostregem aquest senyal a F_m i després enviem les mostres a un convertidor D/A ideal, obtenim un nou senyal $y(t)$. Quin serà aquest senyal $y(t)$ per als següents valor d' F_m ?
 - a) $F_m = 192$ kHz.
 - b) $F_m = 96$ kHz.
 - c) $F_m = 48$ kHz.
 - d) $F_m = 24$ kHz.
12. Considereu un senyal $x_a(t)$ amb un espectre com el de la figura anterior modulats en AM amb una portadora $F_c = 15$ kHz. Volem recuperar el senyal original submostrant el senyal modulats. Quines són totes les possibles freqüències de mostreig F_m possibles?
13. Calculeu la sortida $y(n)$ d'un sistema caracteritzat per la resposta impulsional $h(n) = \{1, 2, -1\}$ quan l'entrada és un graó $x(n) = u(n)$.

2 L'analitzador d'espectres

Les especificacions bàsiques d'un analitzador d'espectres diuen que mostreja a $F_m = 1$ GHz i que pot representar 4096 mostres de l'espectre d'un senyal en un rang de freqüències positiu.

- Quina és la màxima freqüència que pot tenir el senyal d'entrada per evitar *aliasing*? Quantes mostres N del senyal d'entrada s'usen per a calcular la DFT? Durant quant temps t_{obs} cal observar el senyal abans de calcular la seva DFT? Quina és la resolució freqüencial Δ_F de l'analitzador?
- Si el senyal observat és un pols rectangular d'amplitud unitat i durada $1.024 \mu s$, quin és el valor de la component $X(0)$ de la DFT? Quina és la component $X(k)$ que ens informa del valor de la DFT a $F \simeq 1$ MHz? Quin valor té aproximadament? Us pot ajudar un recordatori de *Senyals i Sistemes*: la TF $X_a(F)$ d'un pols rectangular d'amplitud unitat i durada D és una sinc d'amplitud D i zeros a freqüències múltiples d' $1/D$ Hz.
- Si el senyal observat és un senyal sinusoidal d'amplitud unitat i període $T = 1.024 \mu s$, quines és el valor de totes les components $X(k)$? Us pot ajudar el següent recordatori: cada component $X(k)$ de la DFT d' $x(n)$ es pot interpretar com un coeficient c_k de la SF exponencial corresponent a la repetició d' $x(n)$, amb $c_k = X(k)/N$.
- Com canvia el resultat de l'apartat anterior si el període és $T = 0.964 \mu s$:
- Quina creieu que és la mínima diferència de freqüència entre dos senyals sinusoidals de la mateixa amplitud per tal que els puguem identificar amb aquest analitzador? Justifiqueu la resposta.

3 Augmento el nombre de bits d'un ADC?

En cursos anteriors, com *Senyals i Sistemes*, hem parlat del soroll. Per exemple, sabem que en tot circuit apareixerà un soroll d'origen tèrmic que s'afegirà al senyal d'interès. Fem un petit recordatori. La potència d'un senyal sinusoidal d'amplitud de pic A és $S = A^2/2$. Si a aquest senyal se li afegeix un soroll de potència N_a , 10^6 cops inferior a S , aleshores la relació senyal soroll (SNR) es pot calcular com $\text{SNR}_a = S/N_a = 10^6$ o $\text{SNR}_a \text{ dB} = 10 \cdot \log_{10}(S/N_a) = 60$.

En aquesta assignatura hem tractat el tema del soroll en aparèixer el convertidor A/D. Fem un altre recordatori. El soroll de quantificació d'un convertidor A/D de b bits i un rang dinàmic D_r es pot aproximar en el millor dels casos per $N_q = D_r^2/(12 \cdot 2^{2b})$. Si considerem la quantificació d'un senyal sinusoidal lliure de soroll, d'amplitud de pic A , i fem coincidir l'amplitud de pic a pic amb el rang dinàmic del convertidor, $2A = D_r$, aleshores $\text{SNR}_q = S/N_q = 1.5 \cdot 2^{2b}$ o $\text{SNR}_q \text{ dB} = 10 \cdot \log_{10}(S/N_q) = 1.76 + 6b$.

Allò que no hem tractat encara és la quantificació d'un senyal amb soroll afegit. El com es calcula la SNR_t total resultant no és obvi. Però sí que sembla assumible l'afirmació que el soroll resultant serà superior a qualsevol d'aquests dos sorolls: N_a , el soroll que hi ha abans de la quantificació, i N_q , el soroll després de la quantificació si no existís N_a . A la pràctica podem aproximar la potència de soroll total per $N_t = N_a + N_q$.

- Calculeu la variació de $\text{SNR}_q \text{ dB}$ quan s'incrementa en una unitat el nombre de bits b del convertidor A/D.
- Calculeu de nou $\text{SNR}_q \text{ dB}$ quan considereu un senyal sinusoidal amb una amplitud de pic a pic la meitat del rang dinàmic, $2A = D_r/2$.
- Considereu un senyal sinusoidal lliure de soroll, d'amplitud de pic $A = 1.5 \text{ V}$, quantificat amb un convertidor A/D amb els paràmetres $D_r = 3.3 \text{ V}$ i $b = 4$. Quin és el valor de $\text{SNR}_q \text{ dB}$?
- Repetim l'exercici anterior considerant l'existència de soroll N_a tal que $\text{SNR}_a \text{ dB} = 60$. Quin és el valor de $\text{SNR}_t \text{ dB}$? Compareu $\text{SNR}_a \text{ dB}$, $\text{SNR}_q \text{ dB}$ i $\text{SNR}_t \text{ dB}$.
- Un enginyer espavilat però novell pensa que augmentant en 4 el nombre de bits, aconseguirà augmentar la $\text{SNR}_t \text{ dB}$ en 24 dB. Creu que l'increment de la SNR justifica la dedicació de més recursos i l'allargament del temps de conversió. Verifiqueu la validesa d'aquest raonament usant $b = 8$, $b = 12$ i $b = 16$.
- Construïu una taula amb tots els valors $\text{SNR}_a \text{ dB}$, $\text{SNR}_q \text{ dB}$ i $\text{SNR}_t \text{ dB}$ calculats en els dos exercicis anteriors. A quina conclusió ha arribat l'enginyer espavilat?