FONAMENTS MATEMÀTICS PER A TIC

PROBLEMES TEMA 1 - OPERACIONS

1. Resoldre les equacions següents:

$$\text{(i)}\quad V_{x,5} = 10V_{x-1,4} \qquad \text{(ii)}\quad V_{12,x} = 95040$$
$$\text{(iii)}\quad C_{x,5} = \frac{2}{3}C_{x,6} \qquad \text{(iv)}\quad 2\binom{2x}{x} = 7\binom{2x-2}{x-1}$$

2. Desenvolupar les potències que s'indiquen:

$$\text{(i)}\quad (2x^2+3yz^3)^5 \qquad \text{(ii)}\quad (3y-4z)^7 \qquad \text{(iii)}\quad (-a+5b)^{10}$$

3. Determinar quin és el terme independent dels desenvolupaments següents:

$$\text{(i)}\quad \left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n} \qquad \text{(ii)}\quad \left[\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right]^{14}$$

4. Provar que per a qualsevol enter $n \geq 1$ es compleixen les identitats:

$$\text{(i)}\quad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^n$$
$$\text{(ii)}\quad \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

5. Considerem un quadrat amb els seus vèrtexs etiquetats amb les lletres A,B,C,D seguint el sentit positiu (antihorari).

   (i) Representar gràficament l'efecte sobre el quadrat de cadascuna de les permutacions de S_4 següents:

$$\sigma=\begin{pmatrix}ABCD\\BCDA\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}, \rho=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}, \theta=\begin{pmatrix}ABCD\\CBAD\end{pmatrix}, \omega=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}.$$

   (ii) Determinar el resultat de les composicions següents i mostrar l'efecte sobre el quadrat inicial.

   (a) $\sigma\circ\tau$ (b) $\tau\circ\sigma$ (c) σ^2 (d) τ^2 (e) $\rho\circ\theta$ (f) $\theta\circ\omega$ (g) ρ^2 (h) $\rho\circ\tau\circ\omega$

6. Donada la permutació de S_9 definida per $\sigma = \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\\5\,4\,8\,9\,3\,7\,6\,1\,2\end{pmatrix}$,

(i) descomposarla en cicles disjunts,

(ii) calcular σ^2, σ^3 i σ^4,

(iii) quina és la mínima potència que permet obtenir la permutació identitat?

7. Considerem $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 7 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ permutacions de S_7.

   (i) Calcular $\tau \circ \sigma$, $\sigma \circ \tau$, σ^2 i τ^2.

   (ii) Descomposar σ i τ, respectivament, en producte de transposicions.

   (iii) Decidir quina és la signatura de σ i quina és la de τ.

8. Sigui $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ una matriu quadrada 3×3 ($A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$) i denotem per S_3 el conjunt de totes les permutacions de tres elements. Provar que

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_3} sig(\sigma)\ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}.$$