INTRODUCCIÓ A LES FUNCIONS DE DUES VARIABLES

• Definició, límits i continuïtat

Una *funció escalar de dues variables* és una aplicació

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) \end{array}$$

Representem habitualment les imatges a l'eix OZ, és a dir: $z = f(x,y)$.

Exemples

$$z = x^2 y \qquad z = x^2 + y^2 \qquad z = \sin(x+y) \quad \ldots$$

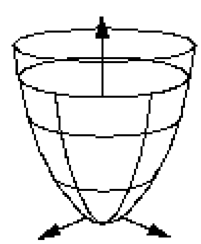
El *domini* de f és el conjunt de parells (x,y) a on està definida la funció f.

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = x^2 + y^2 & Dom(f) = \mathbb{R}^2 \\ g(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2} & Dom(g) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4} & Dom(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \geq 2^2\} \end{array}$$

Representació gràfica

En general $z = f(x,y)$ correspon a una superfície en $\mathbb{R}^3$.

Per exemple, $z = x^2 + y^2$ és un paraboloide.

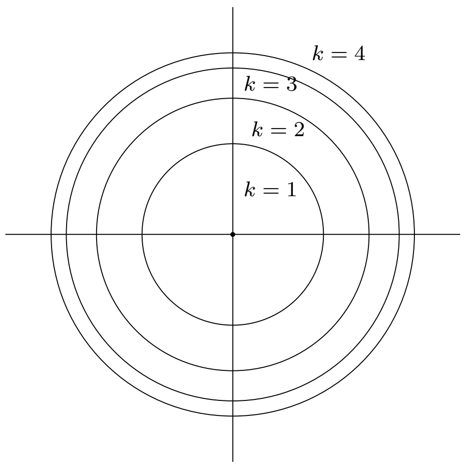


Per visualitzar la superfície s'utilitzen corbes de nivell que tenen com a expressió

$$\boxed{f(x,y) = k}$$

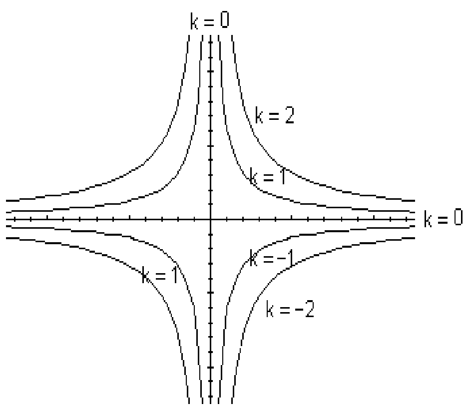
Es tracta de corbes en el pla xy, on estan definides les variables.

Exemple: corbes de nivell de la funció $z = x^2 + y^2$.



$k = 0$	$x^2 + y^2 = 0$	$(x, y) = (0, 0)$
$k = 1$	$x^2 + y^2 = 1$	circumf. de radi 1
$k = 2$	$x^2 + y^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$	circumf. de radi $\sqrt{2}$
$k = 3$	$x^2 + y^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$	circumf. de radi $\sqrt{3}$
$k = 4$	$x^2 + y^2 = 4 = 2^2$	circumf. de radi 2

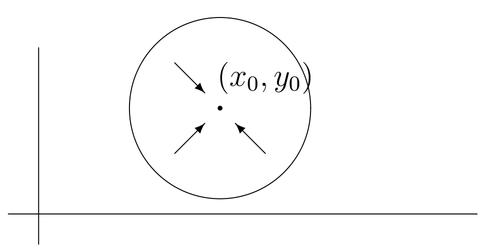
Exemple: corbes de nivell de la funció $z = xy$.



$k = 0$	$xy = 0$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
$k = 1$	$xy = 1$	$y = \dfrac{1}{x}$
$k = 2$	$xy = 2$	$y = \dfrac{2}{x}$
$k = -1$	$xy = -1$	$y = \dfrac{-1}{x}$
$k = -2$	$xy = -2$	$y = \dfrac{-2}{x}$

Límits de funcions de vàries variables

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \Leftrightarrow \quad \Big[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon \Big]$$



El límit ha de ser el mateix en totes les direccions que s'apropen al punt (x_0, y_0).

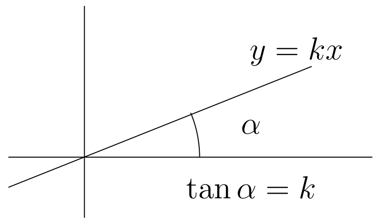
Exemples

(1) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \frac{10}{5} = 2$$

(2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad \text{indeterminació}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 5\,\frac{x^2}{x^2+y^2}\,y = 0 \quad \text{ja que} \quad \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

(3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad ?$$



Considerem aproximacions a $(0,0)$ per rectes de la forma $y = kx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3xkx}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{3k}{1+k^2} \qquad \text{el límit no existeix (depèn de } k\text{)}$$

(4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$$

Funció contínua

La funció $f = f(x,y)$ és contínua en el punt (x_0, y_0) si

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)}$$

Totes les funcions polinòmiques són contínues.
La suma o producte de funcions contínues és contínua.
El quocient de funcions contínues és contínua excepte on s'anul·la el denominador.

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2-y} \qquad Dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)\,/\,y = x^2\} \quad f \text{ contínua en } Dom(f)$$

Les funcions d'una variable contínues es transformen en contínues de dues variables quan es composen amb funcions contínues de dues variables.

$$f(x) = \sin x \quad \text{contínua en } \mathbb{R} \qquad f(x,y) = \sin(x^2+3y) \quad \text{contínua en } \mathbb{R}^2$$

• Derivades parcials

Per a la funció $f = f(x,y)$ es defineixen les *primeres derivades parcials* com:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

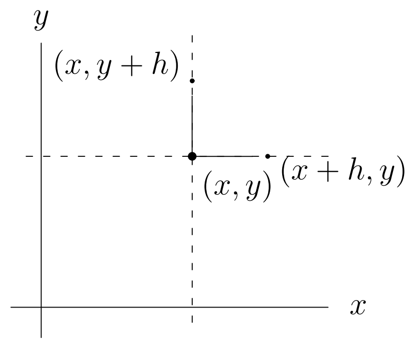
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

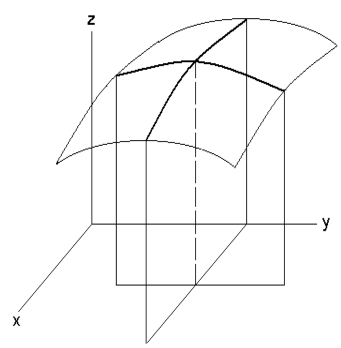
Exemple

$f(x,y) = x^2 y + \cos(xy)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - y\sin(xy)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - x\sin(xy)$





Notació

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Propietat
Per a una funció $f = f(x,y)$ amb f_{xy} i f_{yx} contínues en un obert D es compleix la igualtat de les derivades parcials segones *creuades*:

$$\boxed{f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \text{per a } (x,y) \in D}$$

Exemple: Comprovar la igualtat anterior amb la funció $f(x,y) = x^2y^3$.

$$\begin{array}{lll} f_x = 2xy^3 & f_{xx} = 2y^3 & f_{xy} = 6xy^2 \\ f_y = 3x^2y^2 & f_{yy} = 6x^2y & f_{yx} = 6xy^2 \end{array}$$

Exemple: El mateix per a la funció $f(x,y) = x^2y + \cos(xy)$.

$$\begin{array}{lll} f_x = 2xy - y\sin(xy) & f_{xx} = 2y - y^2\cos(xy) & f_{xy} = 2x - \sin(xy) - xy\cos(xy) \\ f_y = x^2 - x\sin(xy) & f_{yy} = -x^2\cos(xy) & f_{yx} = 2x - \sin(xy) - xy\cos(xy) \end{array}$$

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Definició de gradient

Considerem una funció $f = f(x,y)$. Anomenem *gradient* de la funció f en el punt (x,y) al vector de les derivades parcials:

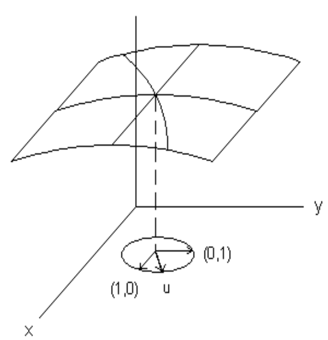
$$\boxed{\nabla f(x,y) = (\, f_x(x,y),\; f_y(x,y)\,)}$$

Per exemple, si $f(x,y) = x^2y^3$ aleshores $\nabla f(x,y) = (\,2xy^3,\; 3x^2y^2\,)$.

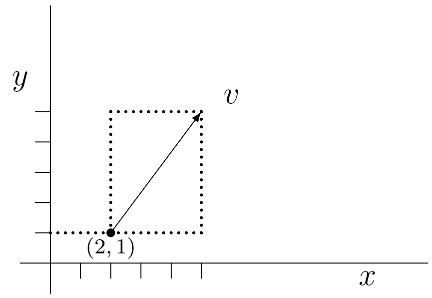
Derivada direccional

Suposem que $f = f(x,y)$ és una funció amb derivades parcials en el punt (x,y).
Si u és un vector unitari ($||u|| = 1$), la derivada direccional de f en la direcció de u en el punt (x,y) és:

$$\boxed{D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u}$$



Exemple
Valor de la derivada direccional de la funció $f(x,y) = x^2y^3$ en el punt $(2,1)$ respecte a la direcció donada pel vector $v = (3,4)$.



$$\text{vector unitari} \qquad u = \frac{v}{||v||} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

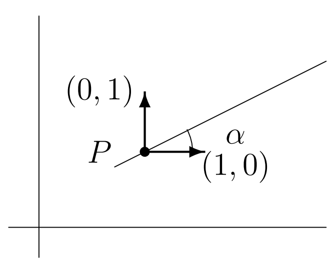
$$\begin{aligned}
\nabla f &= \left(2xy^3, 3x^2y^2\right) \\
D_u\, f(x,y) &= \nabla f \cdot u = \left(2xy^3, 3x^2y^2\right)\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}\,2xy^3 + \frac{4}{5}\,3x^2y^2 \\
D_u\, f(2,1) &= \frac{3}{5}\,4 + \frac{4}{5}\,12 = \frac{60}{5} = \mathbf{12}
\end{aligned}$$

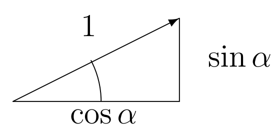
$$\begin{aligned}
D_{e_1} f(x,y) &= \nabla f \cdot e_1 = \left(2xy^3, 3x^2y^2\right)(1,0) = 2xy^3 = f_x(x,y) \\
D_{e_1}\, f(2,1) &= 4 \; = f_x(2,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{e_2} f(x,y) &= \nabla f \cdot e_2 = \left(2xy^3, 3x^2y^2\right)(0,1) = 3x^2y^2 = f_y(x,y) \\
D_{e_2} f(2,1) &= 12 \; = f_y(2,1)
\end{aligned}$$

Observació
Si la direcció respecte a la que es calcula la derivada direccional ve donada mitjançant un angle respecte a l'eix OX, el vector de la direcció és

$$u = (\cos\alpha, \sin\alpha) \qquad ||u|| = 1$$





Exemple
Valor de la derivada direccional de $f(x,y) = x^2y^3$ en el punt $P \equiv (2,1)$ respecte a una

direcció que forma un angle de 30º amb l'eix OX.

$$u = (\cos 30^{\mathrm{o}},\, \sin 30^{\mathrm{o}}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} D_u\, f(x,y) &= \nabla f(x,y) \cdot u = \left(2xy^3, 3x^2y^2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}xy^3 + \frac{3}{2}x^2y^2 \\ D_u\, f(2,1) &= 2\sqrt{3} + 6 \simeq 9.464 \end{aligned}$$

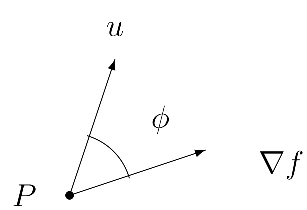
Propietats del gradient

1. Si $\nabla f(x,y) = (0,\, 0)$ llavors $D_u\, f(x,y) = 0 \quad \forall u$
2. La direcció de màxim creixement de la funció f ve donada pel vector $\nabla f(x,y)$. El valor màxim de les derivades direccionals $D_u\, f(x,y)$ és $||\nabla f(x,y)||$
3. La direcció de mínim creixement de la funció f ve donada pel vector $-\nabla f(x,y)$. El valor mínim de les derivades direccionals $D_u\, f(x,y)$ és $-||\nabla f(x,y)||$

Demostració

1. $D_u\, f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u = 0 \cdot u = 0 \quad \forall u$

2./ 3. $D_u\, f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u = ||\nabla f(x,y)||\, ||u|| \cos\phi\,, \quad ||u|| = 1.$



El valor màxim de $D_u\, f(x,y)$ s'obté per a $\cos\phi = 1 \Rightarrow \phi = 0$. El vector u té el mateix sentit que ∇f.

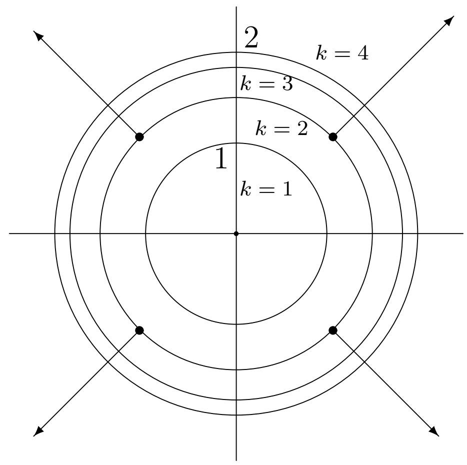
Valor màxim per a $D_u\, f(x,y)$: $\quad ||\nabla f(x,y)||$

El valor mínim de $D_u\, f(x,y)$ s'obté per a $\cos\phi = -1 \Rightarrow \phi = \pi$. El vector u té sentit oposat a ∇f.

Valor mínim per a $D_u\, f(x,y)$: $\; -||\nabla f(x,y)||$

Exemple
Corbes de nivell i gradient per a la funció $f(x,y) = x^2 + y^2$.

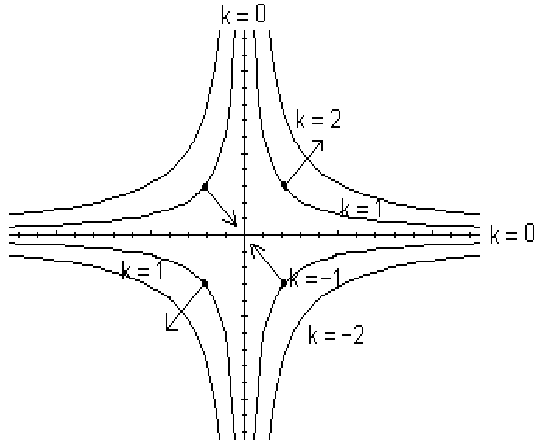
$$
\text{corbes de nivell:} \quad \begin{array}{lll} k=0 & x^2+y^2=0 & (x,y)=(0,0) \\ k=1 & x^2+y^2=1 & \\ k=2 & x^2+y^2=2=(\sqrt{2})^2 & \\ k=3 & x^2+y^2=3=(\sqrt{3})^2 & \dots \end{array}
$$



$$
\nabla f = (\,2x,\,2y\,) \qquad \begin{array}{r} \nabla f(1,1)=(2,2) \\ \nabla f(1,-1)=(2,-2) \\ \nabla f(-1,1)=(-2,2) \\ \nabla f(-1,-1)=(-2,-2) \end{array}
$$

Exemple
Corbes de nivell i gradient per a la funció $f(x,y)=xy$.

$$
\text{corbes de nivell:} \quad \begin{array}{lll} k=0 & xy=0 & \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right. \\ k=1 & xy=1 & y=\dfrac{1}{x} \\ k=2 & xy=2 & y=\dfrac{2}{x} \\ k=-1 & xy=-1 & y=\dfrac{-1}{x} \\ k=-2 & xy=-2 & y=\dfrac{-2}{x} \end{array}
$$

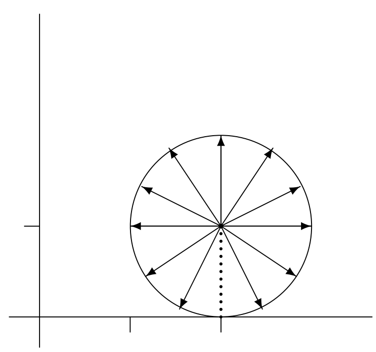


$$\nabla f(x,y) = (\,y,\,x\,) \qquad \begin{array}{c} \nabla f(1,1) = (1,1) \\ \nabla f(-1,1) = (1,-1) \\ \nabla f(-1,-1) = (-1,-1) \\ \nabla f(1,-1) = (-1,1) \end{array}$$

Propietat
Si $f = f(x,y)$ té derivades parcials en el punt (x_0, y_0) amb $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, aleshores $\nabla f(x_0, y_0)$ és perpendicular a la corba de nivell que passa per (x_0, y_0).

Exemple
Considerem la funció $f(x,y) = x^2y^3$. Determinar les direccions de màxim i de mínim creixement de la funció $f(x,y)$ en el punt $P \equiv (2,1)$. Quins són els valors de màxim i de mínim creixement?

$$\nabla f(x,y) = (\,2xy^3,\,3x^2y^2\,) \qquad \nabla f(2,1) = (4,12)$$



La direcció de màxim creixement ve donada pel vector gradient: $\nabla f(2,1) = (4,12)$.

$$u = \frac{(4,12)}{||(4,12)||} = \frac{(4,12)}{\sqrt{4^2+12^2}} = \left(\frac{4}{\sqrt{160}}, \frac{12}{\sqrt{160}}\right) = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)}$$

També:

$$u = \frac{(1,3)}{||(1,3)||} = \frac{(1,3)}{\sqrt{1+9}} = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)}$$

Valor de màxim creixement:

$$||\nabla f(2,1)|| = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{160} = \boxed{4\sqrt{10}} \simeq 12.649$$

Comprovació:

$$D_u \, \nabla f(1,2) = (4,12) \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{4}{\sqrt{10}} + \frac{36}{\sqrt{10}} = \frac{40}{\sqrt{10}} = \boxed{4\sqrt{10}}$$

Direcció de mínim creixement:

$$-\nabla f(2,1) = (-4, -12)$$

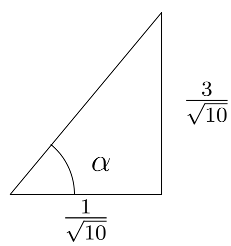
$$\boxed{-u = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)}$$

Valor de mínim creixement:

$$-||\nabla f(2,1)|| = -\sqrt{160} = \boxed{-4\sqrt{10}}$$

Comprovació:

$$D_{-u} \, \nabla f(1,2) = (4,12) \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{-40}{\sqrt{10}} = \boxed{-4\sqrt{10}}$$



$$\alpha = \arctan 3 \simeq \boxed{71,56^0}$$

Problema

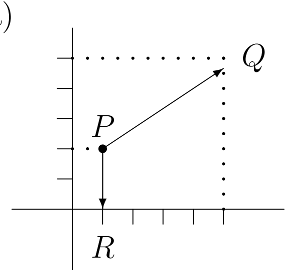
Un camp escalar és diferenciable en $P \equiv (1,2)$ i té com a derivada direccional 6 en la direcció que uneix el punt $(1,2)$ amb el punt $(5,5)$ i derivada direccional de valor -2 en la direcció que uneix els punts $(1,2)$ i $(1,0)$.

(a) Calcular $\nabla f(1,2)$.

(b) Existeix alguna direcció en la que $(D_u f)(P) = 7$?

(c) Calcular en quina direcció $(D_u f)(P) = 4$.

(a)



$$P \equiv (1,2)\ ,\ Q \equiv (5,5)$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (4,3)$$

$$u = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = \frac{(4,3)}{\sqrt{16+9}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \qquad D_u\, f(1,2) = 6$$

$$P \equiv (1,2)\ ,\ R \equiv (1,0)$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (0,-2)$$

$$v = \frac{\overrightarrow{PR}}{\left\|\overrightarrow{PR}\right\|} = \frac{(0,-2)}{\sqrt{0+(-2)^2}} = (0,-1), \qquad D_v\, f(1,2) = -2$$

$$D_u\, f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot u \qquad ||u|| = 1$$

El vector $\nabla f(1,2)$ és la incògnita; designem les seves components com a (a,b).

$$\left.\begin{array}{r} D_u\, f(1,2) = (a,b)\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) = 6 \\ D_v\, f(1,2) = (a,b)(0,-1) = -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} \frac{4}{5}\,a + \frac{3}{5}\,b = 6 \\ -b = -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4a+3b = 30 \\ \boxed{b=2} \end{array}\right\}$$

$$4a + 6 = 30 \qquad 4a = 24 \qquad \boxed{a = 6}$$

$$\boxed{\nabla f(1,2) = (f_x(1,2), f_y(1,2)) = (6,2)}$$

(b) Valor màxim de les derivades direccionals: $||\nabla f(x_0,y_0)||$.

$$||\nabla f(1,2)|| = ||(6,2)|| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} \simeq 6.32455$$

No existeix cap direcció u tal que $D_u\, f(1,2) = 7$.

(c) $D_u\, f(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot u = 4$

Cerquem un vector unitari u: $u = (x,y)$ amb $x^2+y^2 = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} (6,2)\cdot(x,y) = 4 \\ x^2+y^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 6x+2y = 4 \\ x^2+y^2 = 1 \end{array}\right\} \quad y = 2-3x$$

$$x^2 + (2-3x)^2 = 1\ ; \qquad x^2 + 4 - 12x + 9x^2 = 1$$

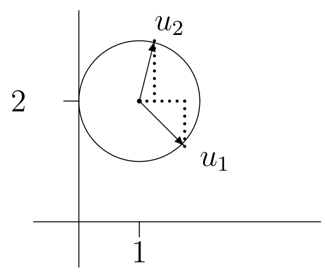
$$10x^2-12x+3=0\,;\quad x=\frac{12\pm\sqrt{144-120}}{20}=\frac{12\pm\sqrt{24}}{20}=\frac{12\pm2\sqrt{6}}{20}=\frac{6\pm\sqrt{6}}{10}$$

$$x=\frac{6+\sqrt{6}}{10}\quad y=2-3\frac{6+\sqrt{6}}{10}=\frac{2-3\sqrt{6}}{10}\quad u_1=\boxed{\left(\frac{6+\sqrt{6}}{10},\frac{2-3\sqrt{6}}{10}\right)}$$

$0.8449 \qquad -0.5348 \qquad \alpha_1\simeq-32.3^{\text{o}}$

$$x=\frac{6-\sqrt{6}}{10}\quad y=2-3\frac{6-\sqrt{6}}{10}=\frac{2+3\sqrt{6}}{10}\quad u_2=\boxed{\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10},\frac{2+3\sqrt{6}}{10}\right)}$$

$0.3550 \qquad 0.93485 \qquad \alpha_2\simeq69^{\text{o}}$



• Pla tangent i recta normal a una superfície

La forma més general en la que pot venir donada una superfície de $\mathbb{R}^3$ és una expressió del tipus:

$$\boxed{F(x,y,z)=0}$$

Per exemple, una esfera de centre $(0,0,0)$ i radi R és: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

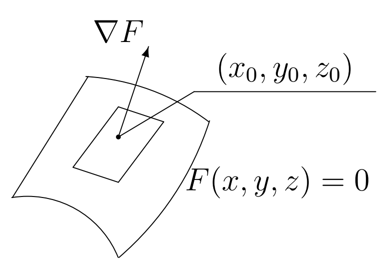
Les superfícies que fins ara havíem considerat venien donades en forma explícita:

$$z=f(x,y)$$

Poden expressar-se en la forma general: $\underbrace{z-f(x,y)}_{F}=0$.

Per exemple, el paraboloide $z=x^2+y^2$ seria $z-x^2-y^2=0$.

També, $z=x^2-y^2$ que és un hiperboloide seria $z-x^2+y^2=0$.



Propietat
El vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \big(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0) \big)$ és un vector normal (perpendicular) a la superfície S d'equació $F(x, y, z) = 0$ en el punt (x_0, y_0, z_0).

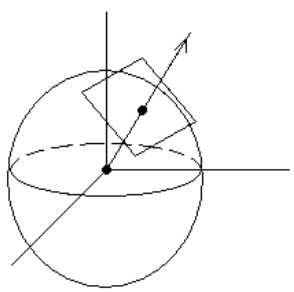
• Equació del pla tangent a S en el punt (x_0, y_0, z_0):

$$\boxed{F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0}$$

• Equació de la recta normal a S en el punt (x_0, y_0, z_0):

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}}$$

Exemple
Determinar el pla tangent i la recta normal a la superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$ en el punt $(1, 1, \sqrt{2})$.



$$\nabla F = (\, 2x,\ 2y,\ 2z\,)$$

$$\nabla F(1, 1, \sqrt{2}) = (2, 2, 2\sqrt{2})$$

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2\sqrt{2}(z - \sqrt{2}) = 0$$

$$x - 1 + y - 1 + \sqrt{2}(z - \sqrt{2}) = 0$$

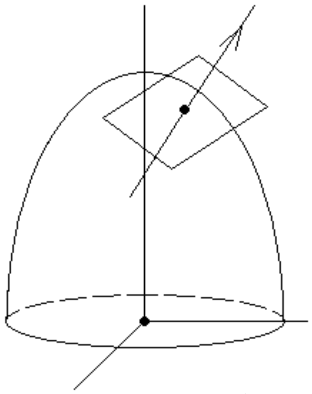
Equació del pla tangent pel punt $(1, 1, \sqrt{2})$:

$$\boxed{x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0}$$

Equació de la recta normal pel punt $(1, 1, \sqrt{2})$:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

Exemple
Determinar el pla tangent i recta normal a la superfície del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ en el punt de coordenades $(x, y) \equiv (1/2, 1)$.



$$z\,(1/2,\,1) = 4 - 1/4 - 1 = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\text{punt } (x_0, y_0, z_0) = (1/2\ , 1\ ,\ 11/4)$$

$$\underbrace{z - 4 + x^2 + y^2}_{F} = 0$$

$$\nabla F(x,y,z) = (\,2x,\ 2y,\ 1\,)\,; \quad \nabla F(1/2,\ 1,\ 11/4) = (1,\ 2,\ 1).$$

Pla tangent:

$$1(x - 1/2) + 2(y-1) + 1(z - 11/4) = 0$$

$$x - \frac{1}{2} + 2y - 2 + z - \frac{11}{4} = 0; \quad x + 2y + z - \frac{21}{4} = 0$$

$$\boxed{4x + 8y + 4z - 21 = 0}$$

Recta normal:

$$\boxed{\frac{x - 1/2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z - 11/4}{1}}$$

• Derivació parcial implícita*

Per a expressions de la forma $z = f(x,y)$ hem calculat $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

A vegades z no ve donada en forma explicíta però també es poden obtenir les seves derivades parcials respecte a x i a y derivant en l'expressió general $F(x,y,z) = 0$, suposant $z = z(x,y)$ en un entorn del punt en el que es deriva.

Exemple

Calcular les derivades parcials $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en l'expressió:

$$x + y + z + \cos(xyz) = 0 \quad \text{en el punt } (0,0,-1).$$

Per a $\dfrac{\partial z}{\partial x}$:

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} - \sin(xyz)\left[yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right] = 0$$

$$[1 - xy\sin(xyz)]\,\frac{\partial z}{\partial x} = yz\sin(xyz) - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz\sin(xyz) - 1}{1 - xy\sin(xyz)} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -1}$$

Per a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

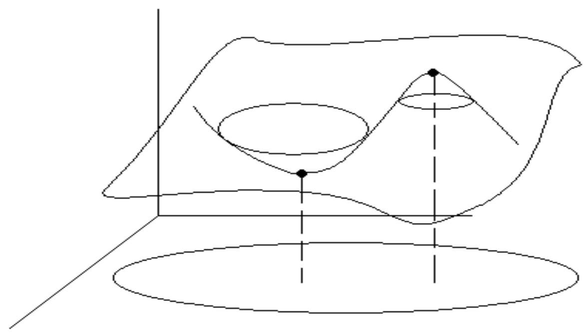
$$1 + \frac{\partial z}{\partial y} - \sin(xyz)\left[xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right] = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz\sin(xyz) - 1}{1 - xy\sin(xyz)} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -1}$$

• Extrems de funcions de dues variables

Suposem que $f = f(x, y)$ és una funció definida en una regió R del pla $\mathbb{R}^2$ i $(x_0, y_0) \in R$.

1. f té un *mínim relatiu* en (x_0, y_0) si $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ per a tots els punts (x, y) en un disc obert al voltant de (x_0, y_0).
2. f té un *màxim relatiu* en (x_0, y_0) si $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per a tots els punts (x, y) en un disc obert al voltant de (x_0, y_0).

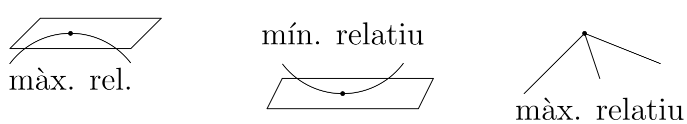


Punt crític

El punt (x_0, y_0) és un punt crític de la funció $f = f(x, y)$ definida en R si:

1. $\nabla f(x_0, y_0) = 0 \quad \big(\, f_x(x_0, y_0) = 0 \;\wedge\; f_y(x_0, y_0) = 0\,\big)$
2. $f_x(x_0, y_0) \vee f_y(x_0, y_0)$ no existeixen.

Propietat
Si f té un extrem relatiu en (x_0, y_0) llavors (x_0, y_0) és un punt crític de f.

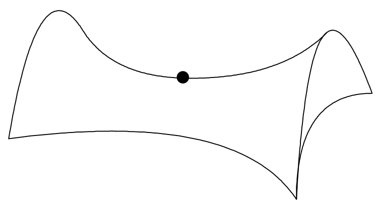


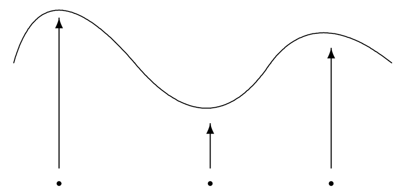
Observació
Busquem els màxims i els mínims relatius entre els punts crítics.

Definició
La *matriu Hessiana* és la matriu de les segones derivades parcials de la funció $f(x,y)$:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Definició
Un *punt de sella* és un punt crític $\big(\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)\big)$ que no és màxim ni mínim relatiu. En una direcció tindria un màxim relatiu i en una altra un mínim relatiu.





Propietat
Si f és una funció amb segones derivades parcials contínues en un obert que contingui al punt crític (x_0,y_0) $\big(\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)\big)$ aleshores:

1. Si $\det H(x_0,y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow f$ té un mínim relatiu en (x_0,y_0).
2. Si $\det H(x_0,y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow f$ té un màxim relatiu en (x_0,y_0).
3. Si $\det H(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow f$ té en (x_0,y_0) un punt de sella.
4. Si $\det H(x_0,y_0) = 0$, el criteri no decideix.

Exemple
Determinar els extrems relatius de la funció $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$.

$$\nabla f(x,y) = (\, 2x + y - 6,\ x + 2y \,)$$

Punts crítics: $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 6 &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x &= -2y \end{aligned}\right\} \quad -3y = 6; \quad y = -2; \quad x = 4.$$

Punt crític $(x_0,y_0) = (4,-2)$.

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(4,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{r} \det H(4,-2) = 3 > 0 \\ f_{xx}(4,-2) = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(4,-2)} \text{ mínim relatiu}$$

Valor en el mínim relatiu:

$$f(4,-2) = 16 - 8 + 4 - 24 + 2 = \boxed{-10}$$

Exemple
Determinar els extrems relatius de la funció $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

$$\nabla f(x,y) = (-3x^2 + 4y \ , 4x - 4y)$$

Punts crítics:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \qquad \left.\begin{array}{r} -3x^2 + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{array}\right\}$$

$$y = x; \quad -3x^2 + 4x = 0; \quad x(-3x+4) = 0; \quad \left\{\begin{array}{ll} x = 0 & y = 0 \\ x = 4/3 & y = 4/3 \end{array}\right.$$

Punts crítics: $\qquad P_1 \equiv (0,0) \qquad P_2 \equiv (4/3,\ 4/3)$.

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad \det H(0,0) = -16 < 0 \Rightarrow P_1 \equiv (0,0) \text{ punt de sella}$$

$$f(0,0) = 1$$

$$H\,(4/3,\ 4/3) = \begin{pmatrix} \boxed{-8} & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{r} \det H\,(4/3,\ 4/3) = 32 - 16 = 16 > 0 \\ f_{xx}\,(4/3,\ 4/3) = -8 < 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2 \equiv (4/3,\ 4/3)} \text{ màxim relatiu}$$

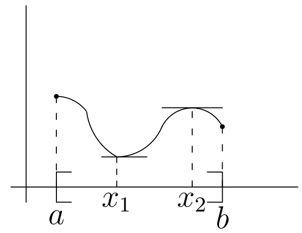
Valor en el màxim relatiu:

$$f\,(4/3,\ 4/3) = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 + 4\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{3} - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \frac{-64}{27} + \frac{64}{9} - \frac{32}{9} + 1 = \frac{-64+96+27}{27} = \boxed{\frac{59}{27}}$$

Teorema del valor extrem o de Weierstrass

Tota funció contínua sobre una regió tancada i acotada R (compacte) arriba al màxim i al mínim absoluts en algun punt de R.

Observació
Aquest és un teorema general, ja estudiat per a funcions d'una variable, on els compactes són intervals tancats.

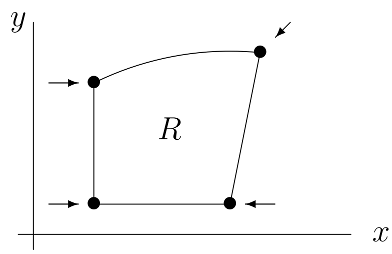


Mètode d'obtenció del màxim i del mínim absoluts:

1. Màxims i mínims relatius a l'interval (a, b), que és l'interior de $[a, b]$.

2. Valors en els extrems $f(a)$ i $f(b)$, que són la frontera de l'interval.

Mètode per a l'obtenció dels punts de màxim i mínim absoluts sobre regions R del pla



1. **Màxims i mínims relatius a l'interior de R.**

   Trobar els punts crítics i decidir amb $H(x, y)$ si són màxims o mínims relatius.

2. **Màxims i mínims relatius sobre les fronteres (obertes).**

   Cada frontera es transforma en una funció d'una variable i allà s'actua amb $f' = 0$ i f'' per a decidir.

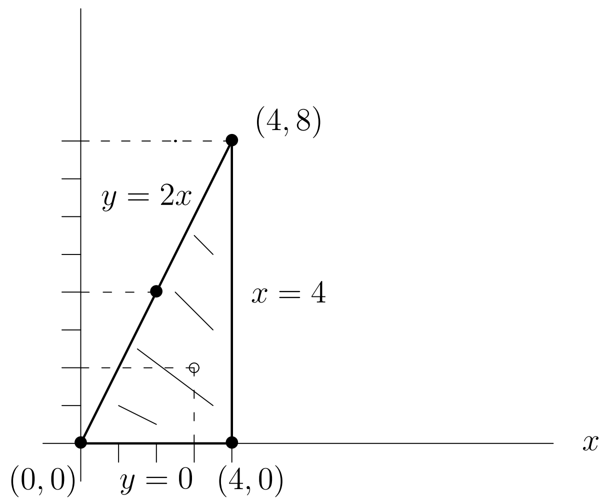
3. **Valors en els punts d'intersecció de les fronteres.**

Finalment, entre tots els punts trobats als apartats 1., 2. i 3., es determinen els que donen el màxim absolut i el mínim absolut, per comparació.

Exemple
Trobar el màxim absolut i el mínim absolut de la funció

$$f(x, y) = xy - 2x - 3y \quad \text{per a} \;\; 0 \leq x \leq 4 \quad \text{i} \quad 0 \leq y \leq 2x$$

En primer lloc visualitzem la regió R:



Com que $f(x,y)$ és contínua en la regió R, pel teorema de Weierstrass, assoleix els valors màxim i mínim absoluts.

1. Màxims i mínims relatius a l'interior de R.

$$\nabla f(x,y) = (y-2, x-3)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \qquad \left.\begin{array}{r} y-2=0 \\ x-3=0 \end{array}\right\} \quad x=3,\ y=2 \qquad P \equiv (3,2)$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(H(3,2)) = -1 < 0 \qquad P \equiv (3,2) \text{ punt de sella}$$

2. Màxims i mínims relatius a les fronteres (obertes).

(i) Segment sobre l'eix OX (y=0) entre els punts $(0,0)$ i $(4,0)$.

$$\left.\begin{array}{r} x=x \\ y=0 \end{array}\right\} \text{ per a } 0<x<4 \quad \rightarrow \quad f(x,0) = -2x$$

$$f(x) = -2x; \quad f'(x) = -2; \quad f'(x) = 0; \quad -2 = 0 \quad \text{Mai}$$

(ii) Segment sobre la recta $x=4$ entre els punts $(4,0)$ i $(4,8)$.

$$\left.\begin{array}{r} x=4 \\ y=y \end{array}\right\} \text{ per a } 0<y<8 \quad \rightarrow \quad f(4,y) = 4y-8-3y$$

$$f(y) = y-8; \quad f'(y) = 1; \quad f'(y) = 0; \quad 1 = 0 \quad \text{Mai}$$

(iii) Segment sobre la recta $y = 2x$ entre els punts $(0,0)$ i $(4,8)$.

$$\left.\begin{array}{r} x = x \\ y = 2x \end{array}\right\} \text{per a } 0 < x < 4 \quad \rightarrow \quad f(x,2x) = x\,2x - 2x - 3\,2x = 2x^2 - 8x$$

$$f(x) = 2x^2 - 8x; \quad f'(x) = 4x - 8; \quad f'(x) = 0; \quad x = 2$$
$$f''(x) = 4; \quad f''(2) = 4 > 0 \qquad x = 2 \quad \text{mínim relatiu}$$

Valor en el mínim relatiu: $f(2,4) = 8 - 16 = \boxed{-8}$

3. Valors en els punts d'intersecció de les fronteres (vèrtexs).

$$f(0,0) = \boxed{0} \qquad f(4,0) = \boxed{-8} \qquad f(4,8) = 32 - 8 - 24 = \boxed{0}$$

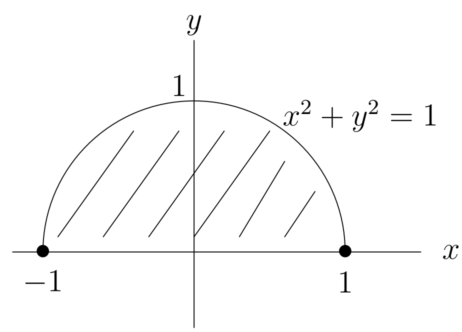
Solució:

$$\boxed{\text{Valor màxim absolut: } \boxed{0} \text{ en els punts } (0,0) \text{ i } (4,8).}$$

$$\boxed{\text{Valor mínim absolut: } \boxed{-8} \text{ en els punts } (2,4) \text{ i } (4,0).}$$

Exemple
Trobar el màxim absolut i el mínim absolut de la funció

$$f(x,y) = x + y \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{i} \quad y \geq 0.$$



1. Màxims i mínims relatius a l'interior.

$$\nabla f(x,y) = (1,1); \quad \nabla f(x,y) = (0,0); \quad (1,1) \neq (0,0) \quad \text{no hi ha punts crítics}$$

2. Màxims i mínims relatius a les fronteres (obertes).

(i) Segment sobre l'eix OX $(y = 0)$ entre els punts $(-1,0)$ i $(1,0)$.

$$\left.\begin{array}{r} x = x \\ y = 0 \end{array}\right\} -1 < x < 1 \quad \rightarrow \quad f(x,0) = x$$

$$f(x) = x; \qquad f'(x) = 1 \quad \text{no hi ha punts crítics}$$

(ii) Semicircumferència $y = +\sqrt{1-x^2}$ per a $-1 < x < 1$.

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = +\sqrt{1-x^2} \end{array}\right\} -1 < x < 1 \quad \rightarrow \quad f\left(x, +\sqrt{1-x^2}\right) = x + \sqrt{1-x^2}$$

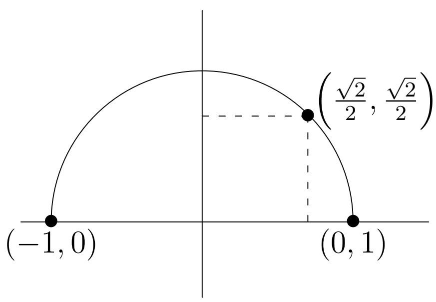
$$f(x) = x + \sqrt{1-x^2}; \quad f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0; \quad \sqrt{1-x^2} - x = 0; \quad \sqrt{1-x^2} = x \xrightarrow{\uparrow 2} 1 - x^2 = x^2; \quad 2x^2 = 1; \quad x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{2}/2 \qquad x = +\sqrt{2}/2 \ \text{és solució} \qquad x = -\sqrt{2}/2 \ \text{no és solució}$$

$$f''(x) = \frac{-\sqrt{1-x^2} + x\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\dfrac{-1+x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$f''\left(+\sqrt{2}/2\right) < 0 \qquad \boxed{x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{màxim local}} \ \rightarrow \ y = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$f\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\sqrt{2}}$$

3. Valors en els punts d'intersecció de les fronteres (vèrtexs).

$$f(-1,0) = \boxed{-1} \qquad f(1,0) = \boxed{1}$$

Solució:

Valor màxim absolut: $\boxed{\sqrt{2}}$ en el punt $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Valor mínim absolut: $\boxed{-1}$ en el punt $(-1,0)$.