

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

**FONAMENTS
D'ÀLGEBRES DE BOOLE**

José Miguel Giménez Pradales

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA 3
ESCOLA POLITÈCNICA D'ENGINYERIA DE MANRESA

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRAS DE BOOLE

1. Definición y propiedades generales
2. Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria
3. Simplificación de funciones booleanas
4. Problemas propuestos
5. Resolución de los problemas
6. El método de simplificación de Quine-McCluskey

1. Definición y propiedades generales

El álgebra de Boole es una estructura matemática que, como tal, abarca un abanico de situaciones cuya componente común es la que se formula en su definición.

En particular, el álgebra de Boole tiene aplicación en la síntesis de redes de conmutación, en el estudio de circuitos digitales y en el análisis y programación mediante ordenador.

Definición de álgebra de Boole

Un conjunto \mathcal{B} dotado de dos leyes de composición interna (suma y producto) tiene estructura de álgebra de Boole si se verifican las propiedades siguientes.

- (1) Las dos leyes son asociativas.

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= a + (b + c) \\ (a b) c &= a (b c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

- (2) Las dos leyes son conmutativas.

$$\begin{aligned}a + b &= b + a \\ a b &= b a \quad \forall a, b \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

- (3) Cada ley tiene elemento neutro.

$$\begin{aligned}\exists 0 \in \mathcal{B} / a + 0 &= a \quad \forall a \in \mathcal{B} \\ \exists 1 \in \mathcal{B} / a 1 &= a \quad \forall a \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

- (4) Para cada elemento $a \in \mathcal{B}$ existe un único elemento $\bar{a} \in \mathcal{B}$, llamado complementario de a , tal que

$$\begin{aligned}a + \bar{a} &= 1 \\ a \bar{a} &= 0\end{aligned}$$

- (5) Cada ley es distributiva respecto a la otra.

$$\begin{aligned}a (b + c) &= a b + a c \\ a + (b c) &= (a + b) (a + c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

Estos cinco pares de propiedades se consideran propiedades primitivas que caracterizan la estructura de álgebra de Boole. También reciben el nombre de axiomas del álgebra de Boole. El resto de propiedades se deduce a partir de éstas.

Ejemplos de álgebras de Boole

- (1) Consideremos un conjunto U al que nos referiremos como *universo*. Llamamos conjunto de las partes del conjunto U al conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto U ; lo denotamos por $\mathcal{P}(U)$.

Si el número de elementos de U es $\text{card } U = n$ entonces $\text{card } \mathcal{P}(U) = 2^n$.

Todo conjunto $\mathcal{P}(U)$ con las operaciones unión de conjuntos, \cup , e intersección de conjuntos, \cap , tiene estructura de álgebra de Boole.

El elemento neutro de la unión de conjuntos es el conjunto vacío, \emptyset , mientras que el neutro de la intersección es el conjunto universo U . El elemento complementario de cualquier subconjunto $A \in \mathcal{P}(U)$ es el complementario en el sentido de conjuntos:

$$\bar{A} = \{x \in U / x \notin A\}$$

- (2) Una proposición lógica es un enunciado declarativo que puede ser verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez. El conjunto de las proposiciones lógicas con las operaciones disyunción (\vee) y conjunción (\wedge) tiene estructura de álgebra de Boole.
- (3) El álgebra de Boole binaria, formada únicamente por dos elementos:

$$\mathcal{B} = \{0, 1\}$$

Principio de dualidad del álgebra de Boole

Toda propiedad que pueda deducirse de las propiedades primitivas o de cualquier otra propiedad derivada de éstas da lugar a otra propiedad que se obtiene intercambiando:

- las operaciones suma y producto,
- los símbolos 0 y 1.

La propiedad así obtenida recibe el nombre de *propiedad dual* de la inicial.

El principio de dualidad es consecuencia de la propia estructura de álgebra de Boole, ya que cada par de propiedades en su definición está formada por una y por su dual.

Propiedades en un álgebra de Boole

Las siguientes propiedades son consecuencia de las propiedades primitivas.

(1) Involución. $\overline{\overline{x}} = x, \quad \forall x \in \mathcal{B}.$

(2) Idempotencia. $x + x = x, \quad x x = x, \quad \forall x \in \mathcal{B}.$

(3) $x 0 = 0, \quad x + 1 = 1, \quad \forall x \in \mathcal{B}.$

(4) Absorción.
$$\begin{aligned} x + x y &= x \\ x(x + y) &= x \end{aligned} \quad \forall x, y \in \mathcal{B}.$$

(5) Los neutros son recíprocamente complementarios. $\overline{0} = 1, \quad \overline{1} = 0.$

(6) $x + \overline{x} y = x + y, \quad x(\overline{x} + y) = x y, \quad \forall x, y \in \mathcal{B}.$

(7) Leyes de De Morgan.
$$\begin{aligned} (1^a \text{ Ley}) \quad \overline{x + y} &= \overline{x} \overline{y} \\ (2^a \text{ Ley}) \quad \overline{x y} &= \overline{x} + \overline{y} \end{aligned} \quad \forall x, y \in \mathcal{B}.$$

Demostración

(1) Basta comprobar que x hace el papel de complementario de \overline{x} .

$$\overline{x} + x = x + \overline{x} = 1 \quad \wedge \quad \overline{x} x = x \overline{x} = 0$$

Las dos primeras igualdades se deducen de las respectivas conmutativas y las dos segundas de la propiedad del complementario. En consecuencia, $\overline{\overline{x}} = x$.

(2) Para demostrar la propiedad $x + x = x, \forall x \in \mathcal{B}$, escribimos:

$$x + x = (x + x) 1 = (x + x)(x + \overline{x}) = x + (x \overline{x}) = x + 0 = x$$

La primera igualdad se deduce de la propiedad del neutro, la segunda del complementario, la tercera de la distributiva de la suma respecto al producto, la cuarta del complementario y la quinta del neutro.

La propiedad $x x = x$ es la dual de la anterior y queda demostrada por el principio de dualidad. Podemos efectuar su desarrollo observando que en cada paso se emplea la propiedad dual, con lo que el resultado es precisamente la propiedad dual de la demostrada.

$$x x = x x + 0 = x x + x \overline{x} = x(x + \overline{x}) = x 1 = x$$

(3) Las propiedades $x0 = 0$, $x + 1 = 1$, $\forall x \in \mathcal{B}$, son una la dual de la otra. Para demostrarlas podemos escribir:

$$x0 = x0 + 0 = x0 + x\bar{x} = x(0 + \bar{x}) = x\bar{x} = 0$$

$$x + 1 = (x + 1)1 = (x + 1)(x + \bar{x}) = x + (1\bar{x}) = x + \bar{x} = 1$$

Las dos primeras igualdades son consecuencia de la propiedad del neutro, las dos segundas del complementario, las dos terceras derivan de la distributiva, las dos cuartas del neutro y las dos últimas nuevamente del complementario.

(4) Actuamos análogamente para las leyes de absorción.

$$x + xy = x1 + xy = x(1 + y) = x1 = x$$

$$x(x + y) = (x + 0)(x + y) = x + (0y) = x + 0 = x$$

Las dos primeras igualdades se derivan de la propiedad del neutro, las dos segundas de la distributiva, las dos terceras de la propiedad (3) y las dos cuartas otra vez del neutro.

(5) Las propiedades $\bar{0} = 1$ y $\bar{1} = 0$ se deducen de la propiedad (3) según la cual $0 + 1 = 1$ y $01 = 0$ y ésta es la condición para que un elemento sea el complementario del otro.

(6) Se cumplen las siguientes cadenas de igualdades:

$$x + \bar{x}y = (x + \bar{x})(x + y) = 1(x + y) = x + y$$

$$x(\bar{x} + y) = x\bar{x} + xy = 0 + xy = xy$$

Otra vez una propiedad es la dual de la otra. Las dos primeras igualdades provienen de la propiedad distributiva, las dos segundas del complementario y las dos terceras del elemento neutro.

(7) Demostramos la 1ª ley de De Morgan, $\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$, lo cual equivale a probar que se cumplen las dos igualdades siguientes:

$$(i) \quad x + y + \bar{x}\bar{y} = 1 \quad (ii) \quad (x + y)(\bar{x}\bar{y}) = 0$$

Probamos (i):

$$\begin{aligned} x + y + \bar{x}\bar{y} &= [(x + y) + \bar{x}][(x + y) + \bar{y}] = [(x + \bar{x}) + y][x + (y + \bar{y})] = \\ &= [1 + y][x + 1] = 11 = 1 \end{aligned}$$

Probamos (ii):

$$\begin{aligned}(x + y)(\bar{x}\bar{y}) &= [x(\bar{x}\bar{y})] + [y(\bar{x}\bar{y})] = (x\bar{x})\bar{y} + (y\bar{y})\bar{x} = \\ &= 0\bar{y} + 0\bar{x} = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

En ambos casos, las primeras igualdades son consecuencia de la propiedad distributiva, las segundas de las propiedades asociativa y conmutativa, las terceras del complementario y las cuartas de la propiedad (3).

La 2ª ley de De Morgan, $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$, es la dual de la 1ª ley y queda demostrada en virtud del principio de dualidad.

Tabla de las operaciones en el álgebra de Boole binaria

Empleando las propiedades del neutro en cualquier álgebra de Boole y la propiedad de idempotencia, podemos completar las tablas de las operaciones en $\mathcal{B} = \{0, 1\}$.

+	0	1
0	0	1
1	1	1

	0	1
0	0	0
1	0	1

Operaciones derivadas en un álgebra de Boole

- Diferencia simétrica

$$x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y = (x + y)(\bar{x} + \bar{y})$$

Propiedades

- (1) $x \oplus y = y \oplus x$
- (2) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
- (3) $x \oplus 0 = x$
- (4) $x \oplus x = 0$
- (5) $x(y \oplus z) = (xy) \oplus (xz)$

- Operación de Sheffer NAND

$$x | y = \overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$$

Propiedades

- (1) $x | x = \bar{x}$
- (2) $x | y = xy$
- (3) $\bar{x} | \bar{y} = x + y$

- Operación de Pierce NOR

$$x \downarrow y = \overline{x + y} = \bar{x} \bar{y}$$

Propiedades

- (1) $x \downarrow x = \bar{x}$
- (2) $x \downarrow y = \overline{x + y}$
- (3) $\bar{x} \downarrow \bar{y} = x y$

2. Funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

Consideramos a partir de ahora el álgebra de Boole binaria $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ y denotamos mediante \mathcal{B}^n el producto cartesiano de \mathcal{B} por sí mismo n veces.

$$\mathcal{B}^n = \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \cdots \times \mathcal{B} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n, \}$$

Los elementos de \mathcal{B}^n son n -plas de elementos de \mathcal{B} , es decir, sucesiones de 0's y 1's cuyo número total es n .

Función booleana en $\mathcal{B} = \{0, 1\}$

Llamamos función booleana definida en $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ o función de conmutación lógica a toda aplicación

$$f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$$

de manera que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pueda expresarse a partir de las operaciones definidas en \mathcal{B} efectuadas sobre las variables x_1, x_2, \dots, x_n .

Ejemplos

$$f : \mathcal{B}^2 \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{definida por} \quad f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$g : \mathcal{B}^2 \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{definida por} \quad g(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2$$

Tablas de valores o tablas de verdad

Toda función booleana en $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ puede representarse mediante tablas de valores o tablas de verdad. Las n primeras columnas permiten representar los 2^n elementos de \mathcal{B}^n y la columna final indica el valor asignado por la función f a cada n -pla (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Ejemplo

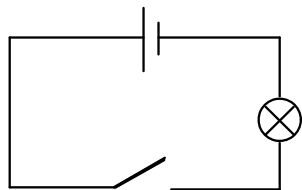
Tablas de verdad de algunas funciones binarias (de dos variables) definidas en $\mathcal{B} = \{0, 1\}$.

x_1	x_2	OR $x_1 + x_2$	AND $x_1 x_2$	$x_1 \oplus x_2$	NAND $x_1 \mid x_2$	NOR $x_1 \downarrow x_2$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0

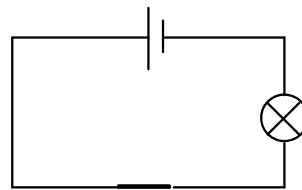
El álgebra de Boole binaria de los interruptores

Un interruptor instalado en un circuito eléctrico es un mecanismo que produce dos respuestas: permite o impide el paso de la corriente eléctrica.

Se puede pensar en el conjunto de respuestas de un interruptor como en los elementos de un álgebra de Boole binaria $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, asociando valor 1 a la variable que denota el interruptor en caso de permitir el paso de la corriente y valor 0 en caso de impedir el paso de la misma.

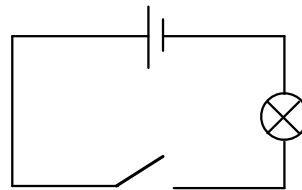
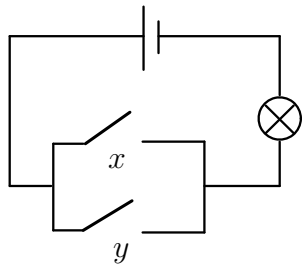


x toma valor 0



x toma valor 1

La suma de dos variables x, y asociadas a interruptores corresponde a la instalación de ambos interruptores en paralelo. El interruptor asociado a la suma $x + y$ ofrece respuesta 0 únicamente en el caso en que x, y ofrecen respuesta 0.



x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Por su lado, el producto de dos variables x , y asociadas a interruptores corresponde a la instalación en serie. El interruptor asociado al producto $x y$ únicamente ofrece respuesta 1 si x , y ofrecen respuesta 1.



x	y	$x y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Número de funciones booleanas en el álgebra de Boole binaria

Para el álgebra de Boole binaria $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, el número de funciones de n variables $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ resulta ser igual al número de variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 2^n en 2^n .

El número de elementos en el conjunto \mathcal{B}^n es 2^n y para cada uno de estos elementos una función f definida sobre $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ puede tomar valor 0 o valor 1. Entonces,

$$\text{card}\{f / f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}\} = RV_{2,2^n} = 2^{(2^n)}$$

Para $n = 2$, el número de funciones de conmutación lógica de dos variables es $2^4 = 16$; para $n = 3$, el número de funciones de tres variables es $2^8 = 256$; para $n = 4$, el número de funciones de cuatro variables es $2^{16} = 65536$.

Tablas de las funciones booleanas de dos variables

A continuación se ofrecen las tablas de las 16 funciones de conmutación lógica de dos variables. Junto a cada tabla se encuentra una expresión simplificada de la fórmula en términos de las operaciones suma, producto y complementario.

x_1	x_2	f_0
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$f_0 = 0$$

x_1	x_2	f_1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$f_1 = x_1 x_2$$

AND

x_1	x_2	f_2
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$f_2 = x_1 \bar{x}_2$$

x_1	x_2	f_3
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$$f_3 = x_1$$

x_1	x_2	f_4
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$f_4 = \bar{x}_1 x_2$$

x_1	x_2	f_5
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$f_5 = x_2$$

x_1	x_2	f_6
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f_6 = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$$

$$f_6 = x_1 \oplus x_2$$

x_1	x_2	f_7
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$f_7 = x_1 + x_2$$

OR

x_1	x_2	f_8
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$f_8 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 = x_1 \downarrow x_2$$

NOR

x_1	x_2	f_9
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$f_9 = x_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

x_1	x_2	f_{10}
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$f_{10} = \bar{x}_2$$

x_1	x_2	f_{11}
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$$f_{11} = x_1 + \bar{x}_2$$

x_1	x_2	f_{12}
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$f_{12} = \bar{x}_1$$

x_1	x_2	f_{13}
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$f_{13} = \bar{x}_1 + x_2$$

x_1	x_2	f_{14}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f_{14} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = x_1 | x_2$$

NAND

x_1	x_2	f_{15}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$f_{15} = 1$$

Definición de maxterm y de minterm

$\mathcal{B} = \{0, 1\}$ denota el álgebra de Boole binaria.

En \mathcal{B}^n el producto de n variables diferentes, complementadas o no, recibe el nombre de *minterm* o término mínimo.

En \mathcal{B}^n la suma de n variables diferentes, complementadas o no, recibe el nombre de *maxterm* o término máximo.

Ejemplo

En \mathcal{B}^4 son minterms $x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$ $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$

En \mathcal{B}^3 son maxterms $x_1 + \bar{x}_2 + x_3$ $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$

Propiedad

- (1) Toda función booleana $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ puede ser expresada como suma de minterms (suma de productos). Esta expresión es la que se conoce como *forma canónica disyuntiva* de la función f .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_n^{\delta_n} \quad x_i^{\delta_i} = \begin{cases} x_i \\ \bar{x}_i \end{cases}$$

- (2) Toda función booleana $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ puede ser expresada como producto de maxterms (producto de sumas). Esta expresión es la que se conoce como *forma canónica conjuntiva* de la función f .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod (x_1^{\delta_1} + x_2^{\delta_2} + \dots + x_n^{\delta_n}) \quad x_i^{\delta_i} = \begin{cases} x_i \\ \bar{x}_i \end{cases}$$

De las dos formas canónicas la más empleada es la forma disyuntiva.

Propiedad

- (1) Las formas canónicas de una función booleana $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ son únicas.
- (2) Dos funciones booleanas son equivalentes (son la misma función) si y sólo si tienen las mismas formas canónicas.

Obtención de las formas canónicas

1. Obtención a partir de la tabla de valores de la función

La forma canónica disyuntiva de una función $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ se obtiene a partir de cada uno de los valores 1 que toma la función. La única forma en la que un producto de todas las variables (o sus complementarios) toma valor 1 es con todos sus factores tomando valor 1. Así el número de minterms en la forma disyuntiva es igual al número de 1's en la tabla de valores de f .

Por su lado, la forma canónica conjuntiva de una función $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ se obtiene a partir de cada uno de los valores 0 que toma la función. La única posibilidad para que una suma de todas las variables (o sus complementarios) tome valor 0 es con todos sus términos tomando valor 0. El número de maxterms en la forma conjuntiva es igual al número de 0's en la tabla de valores de f .

Para una función $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$, la suma del número de minterms en la forma canónica disyuntiva y el número de maxterms en la forma canónica conjuntiva es igual a 2^n , que es el cardinal de \mathcal{B}^n .

Ejemplo

Obtención de las formas canónicas disyuntiva y conjuntiva de la función $f : \mathcal{B}^3 \rightarrow \mathcal{B}$ cuya tabla de valores es

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Forma canónica disyuntiva:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

Forma canónica conjuntiva:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$$

Número de minterms: 5. Número de maxterms: 3. Total: $5 + 3 = 8 = 2^3$.

2. Obtención a partir de una expresión en fórmula

Para obtener la forma canónica disyuntiva a partir de una expresión cualquiera conviene, en una primera aproximación, obtener una suma de productos, aunque estos productos no sean minterms. La propiedad que en mayor medida permite esta aproximación es la distributiva del producto respecto a la suma.

Una vez obtenida la suma de productos, cada variable x_j que no figure en un producto se puede añadir al mismo multiplicando por 1 en la forma

$$\boxed{1 = x_j + \bar{x}_j}$$

A continuación se vuelve a aplicar la propiedad distributiva.

Para la forma canónica conjuntiva se requiere transformar la expresión inicial en producto de sumas. En este proceso juega un papel esencial la propiedad distributiva de la suma respecto al producto.

Una vez obtenido el producto de sumas, cada variable x_j que no figure en una suma se puede añadir a la misma sumando 0 en la forma

$$\boxed{0 = x_j \bar{x}_j}$$

A continuación se vuelve a aplicar la propiedad distributiva.

En ambos procedimientos, después de multiplicar por 1 o sumar 0 y aplicar la distributiva, se debe eliminar los minterms o maxterms repetidos empleando la propiedad de idempotencia.

Ejemplo

Obtención de las formas canónicas disyuntiva y conjuntiva de la función $f : \mathcal{B}^3 \rightarrow \mathcal{B}$ definida por $f(x, y, z) = \bar{x} + yz$.

Forma canónica disyuntiva:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= \bar{x}(y + \bar{y})(z + \bar{z}) + (x + \bar{x})yz \\
 &= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz + \bar{x}yz \\
 &= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz
 \end{aligned}$$

En este caso, la fórmula inicial ya era suma de productos. En el primer sumando se ha hecho aparecer las variables y, z , mientras que en el segundo se ha añadido x . Después de aplicar la propiedad distributiva se ha comprobado que el primer y el último minterm estaban repetidos y se ha eliminado uno de ellos.

Forma canónica conjuntiva:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= (\bar{x} + y)(\bar{x} + z) \\
 &= (\bar{x} + y + z\bar{z})(\bar{x} + y\bar{y} + z) \\
 &= (\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + z) \\
 &= (\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)
 \end{aligned}$$

En primer lugar se ha aplicado la distributiva de la suma respecto al producto para obtener un producto de sumas. En el primer sumando se ha añadido la variable z y en el segundo la variable y . Es importante añadir las variables en el orden que figuran en la función, $x y z$. De esta manera la simplificación de maxterms es más sencilla, tal y como ha sucedido con el primer y el tercer maxterm que estaban repetidos.

Ejemplo

Obtención de las formas canónicas disyuntiva y conjuntiva de la función $f : \mathcal{B}^4 \rightarrow \mathcal{B}$ definida por $f(x, y, z, w) = (x + \bar{y})(z + \bar{w})(\bar{x} + \bar{z})$.

Forma canónica disyuntiva:

$$f(x, y, z, w) = xz\bar{x} + xz\bar{z} + x\bar{w}\bar{x} + x\bar{w}\bar{z} + \bar{y}z\bar{x} + \bar{y}z\bar{z} + \bar{y}\bar{w}\bar{x} + \bar{y}\bar{w}\bar{z}$$

Después de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto a la suma ha aparecido una suma de ocho productos. De entre éstos, el primero, el segundo, el tercero y el sexto son nulos, pues en ellos aparece una expresión del tipo $x\bar{x}$ ó $z\bar{z}$ que es igual a 0 por la propiedad del complementario. Los cuatro productos restantes se escriben con sus variables en el orden dado por la función, $x y z w$.

$$\begin{aligned}
f(x, y, z, w) &= x \bar{z} \bar{w} + \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} \bar{y} \bar{w} + \bar{y} \bar{z} \bar{w} \\
&= x (y + \bar{y}) \bar{z} \bar{w} + \bar{x} \bar{y} z (w + \bar{w}) + \bar{x} \bar{y} (z + \bar{z}) \bar{w} + (x + \bar{x}) \bar{y} \bar{z} \bar{w} \\
&= x y \bar{z} \bar{w} + x \bar{y} \bar{z} \bar{w} + \bar{x} \bar{y} z w + \bar{x} \bar{y} z \bar{w} + \bar{x} \bar{y} z \bar{w} + \bar{x} \bar{y} \bar{z} \bar{w} + \\
&\quad + x \bar{y} \bar{z} \bar{w} + \bar{x} \bar{y} \bar{z} \bar{w}
\end{aligned}$$

Los minterms segundo y séptimo, cuarto y quinto así como sexto y octavo están repetidos. Por la idempotencia, eliminamos uno de cada pareja y obtenemos la forma canónica disyuntiva de f con 5 minterms:

$$f(x, y, z, w) = x y \bar{z} \bar{w} + x \bar{y} \bar{z} \bar{w} + \bar{x} \bar{y} z w + \bar{x} \bar{y} z \bar{w} + \bar{x} \bar{y} \bar{z} \bar{w}$$

Forma canónica conjuntiva:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z, w) &= (x + \bar{y} + z \bar{z} + w \bar{w}) (x \bar{x} + y \bar{y} + z + \bar{w}) (\bar{x} + y \bar{y} + \bar{z} + w \bar{w}) \\
&= (x + \bar{y} + z + w) (x + \bar{y} + z + \bar{w}) (x + \bar{y} + \bar{z} + w) (x + \bar{y} + \bar{z} + \bar{w}) \\
&\quad (x + y + z + \bar{w}) (x + \bar{y} + z + \bar{w}) (\bar{x} + y + z + \bar{w}) (\bar{x} + \bar{y} + z + \bar{w}) \\
&\quad (\bar{x} + y + \bar{z} + w) (\bar{x} + y + \bar{z} + \bar{w}) (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + w) (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + \bar{w})
\end{aligned}$$

La expresión inicial de la función ya es un producto de sumas. En cada sumando hemos añadido en la posición correspondiente las variables que faltan en la forma $x \bar{x}$, $y \bar{y}$, $z \bar{z}$ ó $w \bar{w}$. Después de aplicar la propiedad distributiva aparecen los maxterms, observando que el segundo y el sexto están repetidos. Una vez eliminado uno de ellos se obtiene la forma canónica conjuntiva de f con los esperados 11 maxterms, ya que $\text{card } \mathcal{B}^4 = 2^4 = 16$ y en la forma canónica disyuntiva obtuvimos 5 minterms.

$$\begin{aligned}
f(x, y, z, w) &= (x + \bar{y} + z + w) (x + \bar{y} + z + \bar{w}) (x + \bar{y} + \bar{z} + w) (x + \bar{y} + \bar{z} + \bar{w}) \\
&\quad (x + y + z + \bar{w}) (\bar{x} + y + z + \bar{w}) (\bar{x} + \bar{y} + z + \bar{w}) \\
&\quad (\bar{x} + y + \bar{z} + w) (\bar{x} + y + \bar{z} + \bar{w}) (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + w) (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + \bar{w})
\end{aligned}$$

3. Simplificación de funciones booleanas

Las formas canónicas de una función booleana en $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ son expresiones únicas que identifican cada función booleana y la diferencian de las restantes funciones. No son, sin embargo, expresiones sencillas ni tienen una forma simplificada.

El objetivo de esta sección es la obtención de expresiones simplificadas para las funciones booleanas, tanto si su expresión inicial es una de las formas canónicas como si no lo es.

Métodos habituales de simplificación de funciones booleanas

- (1) El método “algebraico”.
- (2) El método gráfico: los mapas de Karnaugh.
- (3) Los métodos iterativos: el método de Quine-McCluskey.

(1) El método “algebraico”

El método denominado “algebraico” consiste en la utilización de las propiedades generales válidas en cualquier álgebra de Boole.

Las siguientes propiedades facilitan en gran medida los procesos de simplificación.

- (i) *Complementario*. Permite eliminar términos de la forma

$$x + \bar{x} = 1 \quad x \bar{x} = 0$$

- (ii) *Idempotencia*. Permite reducir términos de la forma

$$x + x = x \quad x x = x$$

- (iii) *Absorción*. Permite simplificar términos de la forma

$$x + x y = x \quad x(x + y) = x$$

- (iv) *Leyes de De Morgan*. Actúan sobre el complementario de las operaciones reduciéndolo a complementarios sobre las variables

$$\overline{x + y} = \bar{x} \bar{y} \quad \overline{x y} = \bar{x} + \bar{y}$$

(v) *Distributivas*. Permiten agrupar las variables, según convenga, en productos o sumas

$$x y + x z = x (y + z) \quad (x + y) (x + z) = x + y z$$

Ejemplo

Simplificar la función $f : \mathcal{B}^3 \rightarrow \mathcal{B}$ definida por

$$f(x, y, z) = x + \bar{x} y + x y \bar{z} + x z + x \bar{z}.$$

Simplificación:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x + \bar{x} y + x y \bar{z} + x z + x \bar{z} \\ &= x (1 + y \bar{z}) + \bar{x} y + x (z + \bar{z}) \\ &= x + \bar{x} y + x \\ &= x + \bar{x} y \\ &= (x + \bar{x}) (x + y) \\ &= x + y \end{aligned}$$

Ejemplo

Simplificar la función $f : \mathcal{B}^2 \rightarrow \mathcal{B}$ definida por

$$f(x, y) = (x + y) (x + \bar{y}) (\bar{x} + y).$$

Simplificación:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x + y) (x + \bar{y}) (\bar{x} + y) \\ &= (x x + x \bar{y} + y x + y \bar{y}) (\bar{x} + y) \\ &= [x + x (\bar{y} + y) + 0] (\bar{x} + y) \\ &= x (\bar{x} + y) \\ &= x \bar{x} + x y \\ &= x y \end{aligned}$$

Ejemplo

Simplificar la función $f : \mathcal{B}^4 \rightarrow \mathcal{B}$ definida por

$$f(x, y, z, w) = \overline{w + w \bar{x} + y z}.$$

Simplificación:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= \overline{w + w\bar{x} + yz} \\ &= \overline{w(1 + \bar{x}) + yz} \\ &= \overline{w + yz} \\ &= \bar{w}\bar{y}\bar{z} \\ &= \bar{w}(\bar{y} + \bar{z}) \end{aligned}$$

En esta simplificación se ha empleado en primer lugar la propiedad distributiva. El paso de la segunda a la tercera línea es por la propiedad $1 + x = 1$, $\forall x \in \mathcal{B}$. A continuación se ha empleado la 1ª ley y seguidamente la 2ª ley de De Morgan.

Ejemplo

Simplificar la función $f : \mathcal{B}^4 \rightarrow \mathcal{B}$ definida por

$$f(x, y, z, w) = xw + x\bar{y} + yz + x\bar{z}.$$

Simplificación:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= xw + x\bar{y} + yz + x\bar{z} \\ &= xw + x(\bar{y} + \bar{z}) + yz \\ &= xw + x\bar{y}\bar{z} + yz \\ &= xw + (x + yz)(\bar{y}\bar{z} + yz) \\ &= xw + x + yz \\ &= x(w + 1) + yz \\ &= x + yz \end{aligned}$$

De la primera a la segunda línea se pasa aplicando la propiedad distributiva; de la segunda a la tercera, por la 2ª ley de De Morgan; de la tercera a la cuarta, por la distributiva y de la cuarta a la quinta por la propiedad del complementario, $a + \bar{a} = 1$.

Estos ejemplos muestran la principal dificultad del método de simplificación empleando propiedades generales del algebra de Boole: no existe ninguna regla sistemática que establezca el orden en el que se han de aplicar ni los términos sobre los que deben actuar las propiedades.

(2) Los mapas de Karnaugh

La simplificación de funciones booleanas sobre el álgebra de Boole binaria $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ se complica cuando aumenta el número de variables que intervienen. Para facilitar la tarea se emplean métodos gráficos como el de los mapas de Karnaugh, donde la simplificación obedece a un proceso sistemático que a continuación se detalla.

Una función de n variables se representa mediante una tabla de 2^n posiciones. Cada una de las posiciones de la tabla corresponde a un minterm. Su disposición es tal que el paso de una posición a otra de la tabla, tanto en vertical como en horizontal, corresponde a la variación de una y sólo una variable.

- Para una función de $n = 3$ variables una tabla de $2^3 = 8$ posiciones.

$x y$				
z	00	01	11	10
0				
1				

- Para una función de $n = 4$ variables una tabla de $2^4 = 16$ posiciones.

$x y$				
$z w$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

En ambos casos, la frontera superior de la tabla ha de pensarse como colateral con la frontera inferior y lo mismo la frontera izquierda con la derecha. La tabla, que por comodidad se dibuja sobre una porción de plano, se encuentra sobre un toro.

Método para obtener la tabla a partir de la función

Cada posición de la tabla corresponde a cierta agrupación de valores de las variables. Hemos de mirar cuáles de estas agrupaciones hacen que el

valor de la función sea igual a 1 y, en este caso, colocar un 1 en la posición correspondiente.

Ejemplo: $f(x, y, z, w) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z}w$

$x y$ $z w$	00	01	11	10
00	1			
01			1	
11				
10				

Esta función consta exactamente de dos minterms. En el primero, se consigue el valor 1 exactamente en el caso $x = y = z = w = 0$. En el segundo se consigue valor 1 sólo si $x = y = 1$ a la vez que $z = 0$ y $w = 1$.

Ejemplo: $f(x, y, z, w) = \bar{x}yz$

$x y$ $z w$	00	01	11	10
00				
01				
11			1	
10				1

El único término de esta función no es un minterm. Se obtiene valor 1 exactamente para $x = 0, y = z = 1$. La variable w no figura en la expresión de la función de manera que ésta puede tomar valor 0 ó 1 sin afectar al valor de la función.

Ejemplo: $f(x, y, z, w) = \bar{y}\bar{w}$

Esta función toma valor 1 sólo si $y = 0$ y $w = 0$. Las variables x, z no figuran en la expresión de la función así que pueden tomar cualquier valor.

xy	00	01	11	10
zw				
00	1			1
01				
11				
10	1			1

Ejemplo: $f(x, y, z, w) = z$

xy	00	01	11	10
zw				
00				
01				
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

El valor $z = 1$ hace que la función tome el valor 1. Los valores de x , y y w no intervienen en el valor de la función, de manera que sus ocho posibles agrupaciones dan lugar a ocho 1's en la tabla.

- Una vez completadas las posiciones de la tabla con 1, se consigna valor 0 en las restantes posiciones.

Método para obtener la función simplificada a partir de la tabla

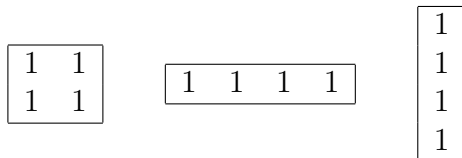
La disposición de la tabla permite agrupar las posiciones con valor 1 en grupos de 2^p ($0 \leq p < n$) correspondientes a expresiones simplificadas.

- Para $p = 3$ agrupaciones de $2^3 = 8$ posiciones con valor 1.

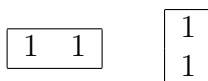
1	1	1	1
1	1	1	1

1	1
1	1
1	1
1	1

- Para $p = 2$ agrupaciones de $2^2 = 4$ posiciones con valor 1.



- Para $p = 1$ agrupaciones de $2^1 = 2$ posiciones con valor 1.



- Para $p = 0$ agrupaciones de $2^0 = 1$ posición con valor 1 (minterms).



En el momento de vaciar la tabla y pasar a la expresión simplificada de la función conviene tener en cuenta estas dos reglas:

- (i) Son preferibles las agrupaciones de más a las de menos 1's, ya que dan lugar a términos más simplificados. Una agrupación de un solo 1 es un minterm y corresponde a un sumando sin simplificación.
- (ii) Si es necesario, las diferentes agrupaciones pueden solaparse, es decir, tener 1's en común.

Ejemplo

Simplificar la función booleana $f : \mathcal{B}^3 \rightarrow \mathcal{B}$ cuya tabla de valores es

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

La tabla de valores de la función tiene cuatro 1's de manera que su forma canónica disyuntiva es

$$f(x, y, z) = \bar{x}y z + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

Mapa de Karnaugh de la función f :

$xy \backslash z$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Expresión simplificada para f :

$$f(x, y, z) = yz + xy + xz$$

Ejemplo

Simplificar la función booleana $f : \mathcal{B}^4 \rightarrow \mathcal{B}$ cuya expresión es

$$f(x, y, z, w) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yzw + x\bar{y}zw + x\bar{y}z\bar{w}.$$

Esta función está expresada en forma canónica disyuntiva como suma de siete minterms. Cada uno de ellos da lugar a un 1 en su tabla de valores o en su mapa.

Mapa de Karnaugh de la función f :

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	1
10	1	0	0	1

Expresión simplificada para f :

$$f(x, y, z, w) = \bar{x}w + \bar{y}z$$

Ejemplo

Simplificar la función booleana $f : \mathcal{B}^4 \rightarrow \mathcal{B}$ definida por

$$f(x, y, z, w) = xw + x\bar{y} + yz + x\bar{z}.$$

Mapa de Karnaugh de la función f :

$x y$				
$z w$	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

Expresión simplificada para f :

$$f(x, y, z, w) = x + yz$$

Ejemplo

Simplificar la función booleana $f : \mathcal{B}^4 \rightarrow \mathcal{B}$, $f(x, y, z, w) = \overline{w + w\bar{x} + yz}$.

Mapa de Karnaugh de la función f :

$x y$				
$z w$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Expresión simplificada para f :

$$f(x, y, z, w) = \bar{z}\bar{w} + \bar{y}\bar{w}$$

Esta función ya había sido simplificada empleando propiedades generales del álgebra de Boole. Aplicando la propiedad distributiva, se puede obtener una expresión más reducida de la función.

$$f(x, y, z, w) = (\bar{z} + \bar{y})\bar{w}$$

Problema 1

Se desea construir una máquina para realizar votaciones en una junta directiva formada por un presidente y tres vicepresidentes. Las decisiones se toman por mayoría simple y el presidente tiene voto de calidad, es decir, en caso de empate su voto decide. Hallar la tabla de valores que representa esta situación, simplificar al máximo la función booleana que se obtiene y diseñar un circuito para una tal máquina.

Ante una determinada proposición cada uno de los miembros puede votar a favor (1) o en contra (0). La decisión de cada integrante de la junta directiva es una variable booleana binaria. Denotaremos por a la del presidente y por b , c y d las de los vicepresidentes.

La decisión de la junta directiva es una función booleana f que depende las variables a , b , c y d que toma los valores 1 ó 0 según la tabla siguiente:

a	b	c	d	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

La función booleana $f(a, b, c, d)$ tiene como forma canónica disyuntiva una suma de ocho minterms, correspondientes a los ocho 1's que aparecen en su tabla de valores. Se observa que la única forma posible para que la junta tome un acuerdo contrario a la decisión del presidente es con todos los vicepresidentes votando lo contrario (líneas 8 y 9 de la tabla).

El mapa de Karnaugh de la función f es:

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

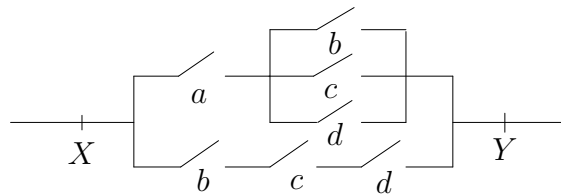
Expresión simplificada para f :

$$f(a, b, c, d) = ab + ac + ad + bcd$$

Aplicando la propiedad distributiva se obtiene una expresión más simple que, además, facilita la construcción más económica del circuito para la máquina.

$$f(a, b, c, d) = a(b + c + d) + bcd$$

Circuito simplificado para la función f :



Problema 2

Se quiere dotar a un ascensor de un dispositivo de seguridad para impedir que puedan viajar niños pequeños o pesos excesivos. El ascensor sólo podrá ponerse en funcionamiento cuando esté vacío o cuando su carga esté comprendida entre 25 y 300 Kg. Con esta finalidad se dispone en el ascensor tres sensores: A sensible a cualquier peso, B sensible a pesos superiores a 25 Kg. y C sensible a pesos superiores a 300 Kg. Diseñar el circuito más sencillo posible que satisfaga las condiciones deseadas.

Llamamos a , b y c a las respuestas de los sensores A, B y C, respectivamente. Estas variables toman valor 1 si los sensores detectan el peso para el cual están diseñados y valor 0 en caso contrario.

La función $f(a, b, c)$ depende de las variables asociadas a los sensores y produce respuesta 1 para permitir el funcionamiento del ascensor y respuesta 0 en caso contrario. Su tabla de valores es:

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	-
0	1	0	-
0	1	1	-
1	0	0	0
1	0	1	-
1	1	0	1
1	1	1	0

En esta tabla de valores aparecen **sucesos imposibles** marcados con el símbolo - en la columna de valores de f . Por ejemplo, en la segunda fila, no es posible que los sensores de 0 y 25 Kg no detecten carga y sí lo haga el de 300 Kg.

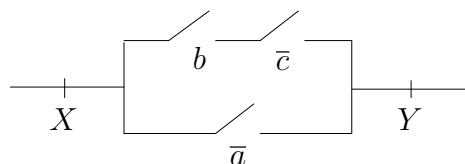
El mapa de Karnaugh de la función f es el que se muestra a continuación. Respecto a la simplificación de la función, los valores imposibles pueden considerarse como 0's o como 1's, con el criterio de considerar agrupaciones de mayor número de 1's y así obtener expresiones más simples.

$c \backslash ab$	00	01	11	10
0	1	-	1	0
1	-	-	0	-

Función simplificada:

$$f(a, b, c) = \bar{a} + b\bar{c}$$

Circuito:



4. Problemas propuestos

1. Sea \mathcal{B} un álgebra de Boole y a, b elementos de \mathcal{B} . Decir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones.

- (a) $ab = 1 \Rightarrow a = 1 \wedge b = 1$ (b) $a^2 = a \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$
 (c) $a^3b^2 = a^2b^3$ (d) $\bar{a} + ab = b + \bar{a}\bar{b}$

2. Encontrar una función booleana de dos variables que cumpla:

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

3. Escribir como suma de minterms y como producto de maxterms las siguientes funciones:

- (a) $f(a, b, c) = a(b + \bar{c})$
 (b) $f(a, b, c) = ac + \bar{b}$
 (c) $f(a, b, c, d) = (a + \bar{b})(c + \bar{d})(\bar{a} + \bar{c})$

4. Determinar una forma canónica para cada una de las siguientes funciones booleanas:

- (a) $f(x, y, z) = \overline{x + \bar{y}} + z^2 + \overline{1 + xy}$
 (b) $f(x, y, z, t) = z[(x + y)t + \overline{x + t}] + \overline{\overline{x + z + t}}$

5. Simplificar las siguientes funciones booleanas:

- (a) $f(x, y, z) = x + \bar{x}y + xy\bar{z} + xz + x\bar{z}$
 (b) $f(x, y) = (x + y)(x + \bar{y})(\bar{x} + y)$
 (c) $f(x, y) = (x + y)^3$
 (d) $f(a, b, c) = (a + \bar{b} + a\bar{b})(ab + \bar{a}c + bc)$

6. Empleando mapas de Karnaugh, simplificar las siguientes funciones:

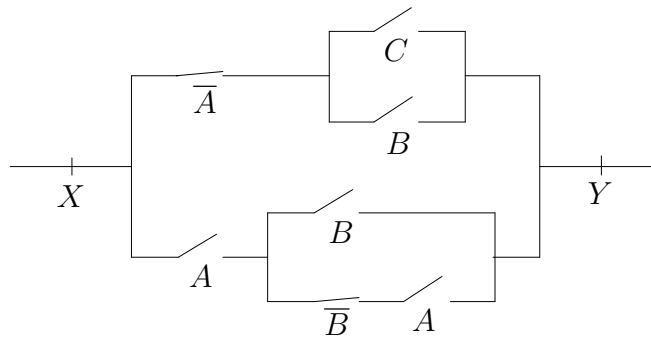
- (a) $f(x, y, z, t) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}t + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}zt + \bar{x}y\bar{z}t + \bar{x}yzt + x\bar{y}zt + x\bar{y}z\bar{t}$

- (b) $f(x, y, z, t) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}yz\bar{t} + \bar{x}yzt + xy\bar{z}\bar{t} +$
 $+ xyz\bar{t} + xyzt + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t}$
- (c) $f(x, y, z, t) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}yz\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + xyz\bar{t} +$
 $+ x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t}$
- (d) $f(x, y, z, t) = xy\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}yz\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t}$

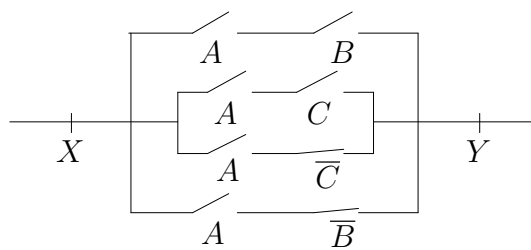
7. Simplificar las siguientes funciones booleanas:

- (a) $f(x, y, z, t) = xyz\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}yz\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$
- (b) $f(x, y, z, t) = xyt + \bar{x}yt + xz + \overline{x+z}$

8. Encontrar una función booleana que represente el circuito de la figura. Simplificar la función obtenida y construir un circuito equivalente lo más simple posible.



9. Simplificar el siguiente circuito:



5. Resolución de los problemas

1. (a) $\boxed{ab = 1 \Rightarrow a = 1 \wedge b = 1}$ Cierto

$$\left. \begin{array}{l} a = a1 = a(ab) = (aa)b = ab = 1 \\ b = 1b = (ab)b = a(bb) = ab = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1, b = 1$$

(b) $\boxed{a^2 = a \Rightarrow a = 0 \vee a = 1}$ Falso

$a^2 = a$ es siempre cierto, no sólo para $a = 0$ ó $a = 1$.

(c) $\boxed{a^3b^2 = a^2b^3}$ Cierto

$$\begin{aligned} a^3b^2 &= a a a b b = a a b = a b \\ a^2b^3 &= a a b b b = a b b = a b \end{aligned}$$

(d) $\boxed{\bar{a} + ab = b + \bar{a}\bar{b}}$ Cierto

$$\begin{aligned} \bar{a} + ab &= (\bar{a} + a)(\bar{a} + b) = 1(\bar{a} + b) = \bar{a} + b \\ b + \bar{a}\bar{b} &= (b + \bar{a})(b + \bar{b}) = (b + \bar{a})1 = b + \bar{a} \end{aligned}$$

2.

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$$\boxed{f(x, y) = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} + xy}$$

$$\boxed{f(x, y) = x + \bar{y}}$$

3. (a) $f(a, b, c) = a(b + \bar{c}) = ab + a\bar{c} = ab(c + \bar{c}) + a(b + \bar{b})\bar{c} =$

$$= abc + ab\bar{c} + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} = \boxed{abc + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}}$$

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= a(b + \bar{c}) = (a + b\bar{b} + c\bar{c})(a\bar{a} + b + \bar{c}) = \\ &= (a + b + c)(a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c})(a + b + \bar{c})(\bar{a} + b + \bar{c}) = \end{aligned}$$

$$= \boxed{(a + b + c)(a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + b + \bar{c})}$$

(b) $f(a, b, c) = ac + \bar{b} = a(b + \bar{b})c + (a + \bar{a})\bar{b}(c + \bar{c}) =$

$$= abc + a\bar{b}c + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c} =$$

$$\begin{aligned}
&= \boxed{abc + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c}} \\
f(a, b, c) &= ac + \bar{b} = (a + \bar{b})(c + \bar{b}) = (a + \bar{b} + c\bar{c})(a\bar{a} + \bar{b} + c) = \\
&= (a + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + \bar{b} + c) = \\
&= \boxed{(a + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + c)} \\
\text{(c) } f(a, b, c, d) &= (a + \bar{b})(c + \bar{d})(\bar{a} + \bar{c}) = (ac + a\bar{d} + \bar{b}c + \bar{b}\bar{d})(\bar{a} + \bar{c}) = \\
&= a\bar{a}c + ac\bar{c} + a\bar{a}\bar{d} + a\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{b}c\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{d} = \\
&= a\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{d} = a(b + \bar{b})\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c(d + \bar{d}) + \bar{a}\bar{b}(c + \bar{c})\bar{d} + (a + \bar{a})\bar{b}\bar{c}\bar{d} = \\
&= ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} = \\
&= \boxed{ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} \\
f(a, b, c, d) &= (a + \bar{b})(c + \bar{d})(\bar{a} + \bar{c}) = (a + \bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d})(a\bar{a} + b\bar{b} + c + \bar{d})(\bar{a} + b\bar{b} + \bar{c} + d\bar{d}) = \\
&= (a + \bar{b} + c + d)(a + \bar{b} + c + \bar{d})(a + \bar{b} + \bar{c} + d)(a + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})(a + b + c + \bar{d})(a + \bar{b} + c + \bar{d}) \\
&= (\bar{a} + b + c + \bar{d})(\bar{a} + \bar{b} + c + \bar{d})(\bar{a} + b + \bar{c} + d)(\bar{a} + b + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + d)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}) = \\
&= \boxed{\begin{aligned} &(a + \bar{b} + c + d)(a + \bar{b} + c + \bar{d})(a + \bar{b} + \bar{c} + d)(a + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}) \\ &(a + b + c + \bar{d})(\bar{a} + b + c + \bar{d})(\bar{a} + \bar{b} + c + \bar{d})(\bar{a} + b + \bar{c} + d) \\ &(\bar{a} + b + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + d)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}) \end{aligned}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \text{ (a) } \quad f(x, y, z) &= \overline{x + \bar{y}} + z^2 + \overline{1 + xy} \\
f(x, y, z) &= \bar{x}y + z = \bar{x}y(z + \bar{z}) + (x + \bar{x})(y + \bar{y})z \\
f(x, y, z) &= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z \\
&= \boxed{\bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xyz + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } \quad f(x, y, z, t) &= z[(x + y)t + \overline{x + t}] + \overline{x + z + \bar{t}} \\
f(x, y, z, t) &= z[xt + yt + x\bar{t}] + x\bar{z}t \\
f(x, y, z, t) &= x(y + \bar{y})zt + (x + \bar{x})yzt + x(y + \bar{y})z\bar{t} + x(y + \bar{y})\bar{z}t \\
f(x, y, z, t) &= xyzt + x\bar{y}zt + x\bar{y}zt + \bar{x}yzt + x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}t \\
&= \boxed{xyzt + x\bar{y}zt + \bar{x}yzt + x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}t}
\end{aligned}$$

5. (a)
$$f(x, y, z) = x + \bar{x}y + xy\bar{z} + xz + x\bar{z}$$

$$f(x, y, z) = x(1 + y\bar{z} + z + \bar{z}) + \bar{x}y = x + \bar{x}y$$

$$f(x, y, z) = (x + \bar{x})(x + y) = 1(x + y) = \boxed{x + y}$$

(b)
$$f(x, y) = (x + y)(x + \bar{y})(\bar{x} + y)$$

$$f(x, y) = (x + y\bar{y})(\bar{x} + y) = x(\bar{x} + y) = x\bar{x} + xy = \boxed{xy}$$

(c)
$$f(x, y) = (x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y) = \boxed{x + y}$$

(d)
$$f(a, b, c) = (a + \bar{b} + a\bar{b})(ab + \bar{a}c + bc)$$

$$f(a, b, c) = (a + \bar{b})(ab + \bar{a}c + bc)$$

$$f(a, b, c) = aab + a\bar{a}c + abc + ab\bar{b} + \bar{a}\bar{b}c + b\bar{b}c$$

$$f(a, b, c) = ab + abc + \bar{a}\bar{b}c = \boxed{ab + \bar{a}\bar{b}c}$$

6. (a)
$$f(x, y, z, t) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}t + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}t + \bar{x}yzt + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}z\bar{t}$$

xy zt	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	1
10	1	0	0	1

Función simplificada:
$$f(x, y, z, t) = \bar{x}t + \bar{y}z$$

$$(b) f(x, y, z, t) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}yz\bar{t} + \bar{x}yzt + xy\bar{z}\bar{t} + \\ + xyz\bar{t} + xyz\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t}$$

$\begin{array}{c} xy \\ \hline zt \end{array}$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	1

Función simplificada: $f(x, y, z, t) = \bar{t} + yz$

$$(c) f(x, y, z, t) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}yzt + xy\bar{z}\bar{t} + xyz\bar{t} + \\ + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t}$$

$\begin{array}{c} xy \\ \hline zt \end{array}$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

Función simplificada: $f(x, y, z, t) = yt + \bar{y}\bar{t}$

$$(d) f(x, y, z, t) = xy\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}yz\bar{t} + x\bar{y}zt + xy\bar{z}t + \bar{x}y\bar{z}t$$

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	0	1
10	1	1	0	0

Función simplificada: $f(x, y, z, t) = y\bar{z} + \bar{x}z\bar{t} + x\bar{y}zt$

$$7. (a) f(x, y, z, t) = xyzt + x\bar{y}zt + \bar{x}yzt + xyz\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + xy\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}t$$

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

Función simplificada: $f(x, y, z, t) = xz + xt + yzt$

$$(b) f(x, y, z, t) = xyt + \bar{x}yt + xz + \overline{x+z}$$

$$f(x, y, z, t) = xyt + \bar{x}yt + xz + \bar{x}\bar{z} = (x + \bar{x})yt + xz + \bar{x}\bar{z}$$

Función simplificada: $f(x, y, z, t) = yt + xz + \bar{x}\bar{z}$

8. La función que representa el circuito es:

$$f(A, B, C) = \bar{A}(B + C) + A(B + \bar{B}A)$$

Simplificación “algebraica”:

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= \bar{A}(B + C) + A(B + \bar{B}A) = \bar{A}B + \bar{A}C + AB + A\bar{B} = \\ &= B + A\bar{B} + \bar{A}C = (B + A)(B + \bar{B}) + \bar{A}C = B + (A + \bar{A})(A + C) \end{aligned}$$

Función simplificada: $f(A, B, C) = A + B + C$

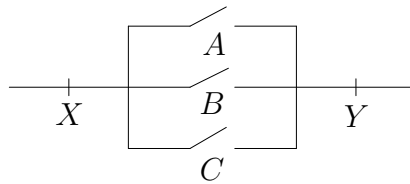
Simplificación mediante mapa de Karnaugh:

	AB				
C		00	01	11	10
0	0	1	1	1	
1	1	1	1	1	

Función simplificada: $f(A, B, C) = A + B + C$

En el mapa de Karnaugh de esta función aparece un único valor 0. Así, su expresión simplificada corresponde a un único maxterm, $A + B + C$.

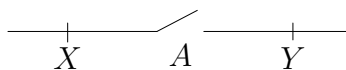
Circuito simplificado:



9. $f(A, B, C) = AB + AC + A\bar{C} + A\bar{B} = A(B + \bar{B} + C + \bar{C}) = A$

Función simplificada: $f(A, B, C) = A$

Circuito simplificado:



6. El método de simplificación de Quine-McCluskey

El principal interés de este método de simplificación de funciones booleanas radica en el hecho de que puede aplicarse a un número cualquiera de variables. Además se trata de un procedimiento programable.

El método de simplificación de Quine-McCluskey consta de dos etapas:

- (1) El método de Quine
- (2) La cuadrícula de McCluskey

(1) El método de Quine

Partiendo de la forma canónica disyuntiva de la función, se emplea la fórmula de simplificación

$$x\mu + \bar{x}\mu = (x + \bar{x})\mu = 1\mu = \mu.$$

De esta manera se elimina una variable del producto que se considere en cada momento (primero minterms, después productos de menos variables). Para conseguir estas simplificaciones se actúa según el procedimiento siguiente:

1. Se define un índice que indique el número de 1's que tiene cada expresión que se considere.
2. Se clasifica según estos índices los minterms sobre los que la función toma valor 1.
3. Se comparan las expresiones que tiene índice m con las que tienen índice $m+1$, ya que son las únicas que pueden diferir en una variable. Si las expresiones comparadas tienen todas las cifras iguales excepto una, se aplica la simplificación indicada, sustituyendo la variable diferente por un asterisco (*), colocando la expresión resultante en la siguiente columna con el índice correspondiente.

Este proceso se reitera hasta que no se pueda combinar más expresiones, señalando de alguna manera (-) aquellas que han sido simplificadas pasando a tener una variable menos.

Ejemplo

Simplificar $f(x, y, z) = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz$.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

índice	ternas	pares	aislados
0	000 -	00* - 0*0 -	0**
1	001 - 010 -	0*1 - 01* -	
2	011 -	*11	
3	111 -		

Se ha comparado, en cada columna, las expresiones de índice 0 con las de índice 1, las de índice 1 con las de índice 2 y las de índice 2 con las de 3.

Una vez realizadas las posibles comparaciones, una primera simplificación de la función corresponde a la suma de términos no marcados con (-). En el ejemplo:

$$f(x, y, z) = \bar{x} + yz$$

(2) La cuadrícula de McCluskey

La expresión que se obtiene una vez aplicado el método de Quine puede contener términos redundantes. Para evitar este inconveniente se considera la llamada cuadrícula de McCluskey.

En las columnas de la cuadrícula de McCluskey se disponen los minterms iniciales, mientras que en las filas se colocan los términos resultantes de la simplificación de Quine.

	<u>$\bar{x}yz$</u>	<u>$\bar{x}y\bar{z}$</u>	<u>$\bar{x}\bar{y}z$</u>	<u>$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$</u>	<u>xyz</u>
\bar{x}	☒	×	×	×	
yz	×				☒

Cada símbolo \times que se marca en la cuadrícula supone que el término simplificado de la fila representa al minterm de la columna. Algunas columnas sólo tendrán un símbolo \times , lo cual indica que el término simplificado es el único que representa a ese minterm y, por lo tanto, es imprescindible.

El método de la cuadrícula acaba marcando todas las expresiones imprescindibles (símbolo ☒), así como los minterms que quedan representados por los términos simplificados, hasta considerar todos los minterms de la función inicial.

En el ejemplo, al marcar \boxtimes en la primera columna quedan recogidos los minterms $\bar{x}yz$, $\bar{x}y\bar{z}$, $\bar{x}\bar{y}z$, $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, por lo que pueden señalarse estos cuatro primeros. Al marcar \boxtimes en la quinta columna queda recogido el minterm xyz , de forma que ya se han considerado todos los minterms iniciales.

La expresión simplificada definitiva para la función del ejemplo requiere los dos términos obtenidos por el método de Quine y resulta ser

$$f(x, y, z) = \bar{x} + yz.$$

Ejemplo

Simplificar la función

$$f(x, y, z, w) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}yzw + xy\bar{z}\bar{w} + xyz\bar{w} + xyzw.$$

índice	4-plas	ternas	pares	aislados
0				
1	0001 - 0100 -	00*1 - 0*01 - 010* *100	0**1	
2	0011 - 0101 - 1100 -	0*11 - 01*1 - 11*0		
3	0111 - 1110 -	*111 111*		
4	1111 -			

La simplificación por el método de Quine es

$$f(x, y, z, w) = \bar{x}y\bar{z} + y\bar{z}\bar{w} + xy\bar{w} + yzw + xyz + \bar{x}w$$

y a partir de ésta se procede a completar la cuadrícula de McCluskey.

	<u>$\bar{x}\bar{y}\bar{z}w$</u>	<u>$\bar{x}\bar{y}zw$</u>	<u>$\bar{x}y\bar{z}\bar{w}$</u>	<u>$\bar{x}y\bar{z}w$</u>	<u>$\bar{x}yzw$</u>	<u>$xy\bar{z}\bar{w}$</u>	<u>$xyz\bar{w}$</u>	<u>$xyzw$</u>
$\bar{x}y\bar{z}$			×	×				
$y\bar{z}\bar{w}$			\boxtimes			×		
$xy\bar{w}$						×	×	
yzw					×			×
xyz							\boxtimes	×
$\bar{x}w$	\boxtimes	×		×	×			

Simplificación final de la función por Quine-McCluskey:

$$f(x, y, z, w) = \bar{x}w + y\bar{z}\bar{w} + xyz$$

Al marcar el símbolo \boxtimes en la primera columna quedan representados los cuatro minterms señalados con doble línea. Después se marca \boxtimes en la posición de la fila 2 columna 3, lo que supone representar dos nuevos minterms, en contraposición al único nuevo minterm que supondría marcar la posición de la fila 1 columna 3. Por este mismo motivo se prefiere marcar la posición de la fila 5 columna 7, antes que la posición de la fila 3 de la misma columna.

Las tres filas con símbolo \boxtimes recogen todos los minterms de la función inicial, de manera que la simplificación de la función se consigue con los términos reducidos de esas filas.

Observación

Se puede afirmar, en términos generales, que en la cuadrícula de McCluskey siempre se debe considerar en primer lugar las expresiones más reducidas de la simplificación, ya que éstas pueden representar más minterms a la vez. Dentro de las de un mismo tamaño se preferirán aquellas expresiones que representen a la vez a un mayor número de minterms nuevos, ya que de esta manera se conseguirá acabar antes con el recuento de todos los minterms de la función, obteniendo así una expresión más simplificada.

Puede compararse este método de simplificación con los métodos precedentes sobre las funciones que han ido apareciendo en los diferentes ejemplos.