



Senyals i Sistemes

Problemes Tema I

Enginyeria de Sistemes TIC (iTIC)
EPSEM - UPC

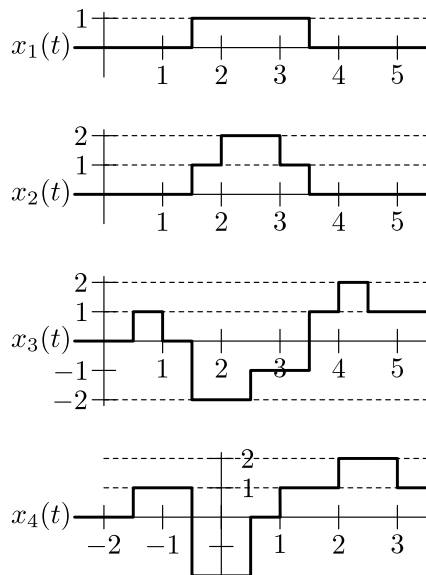
Jordi Bonet Dalmau

22 de març de 2013

1 Manipulacions amb senyals bàsics

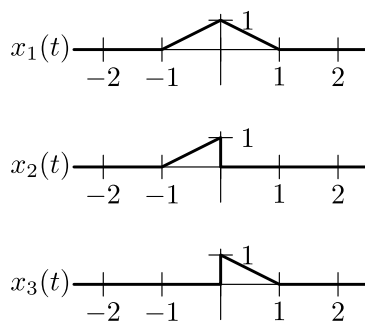
A partir dels senyals bàsics (*unit step*, *signum*, *rectangular pulse*, *triangular pulse*, *sinc*, *exponential* i (*unit impulse*) es poden generar una bona quantitat de funcions.

EXERCICI 1.1 Expressen analíticament les funcions corresponents a les següents gràfiques a partir de la funció *step*.

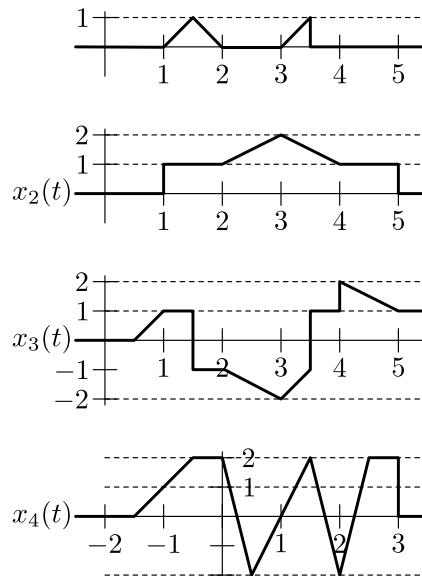


EXERCICI 1.2 Expressen analíticament les funcions corresponents a les gràfiques de l'exercici anterior a partir de la funció *rectangular pulse* (i només si és imprescindible de la funció *step*).

EXERCICI 1.3 Expressen analíticament les funcions corresponents a les següents gràfiques a partir de la funció *triangular pulse*, i de la funció *step* si s'escau.



EXERCICI 1.4 Expressen analíticament les funcions corresponents a les següents gràfiques a partir de la funció *rectangular pulse* i *triangular pulse*, i de la funció *step* si s'escau,



EXERCICI 1.5 Representeu gràficament $y(t) = 2\Pi\left(\frac{t-0.25}{0.5}\right) - 4\Lambda\left(\frac{t+0.5}{0.5}\right) + 2\Pi\left(\frac{t-1.25}{2}\right) - 4\Lambda\left(\frac{t-2}{2.5}\right) + 2\Pi\left(\frac{t-2.25}{0.5}\right)$.

2 Resposta impulsional i convolució

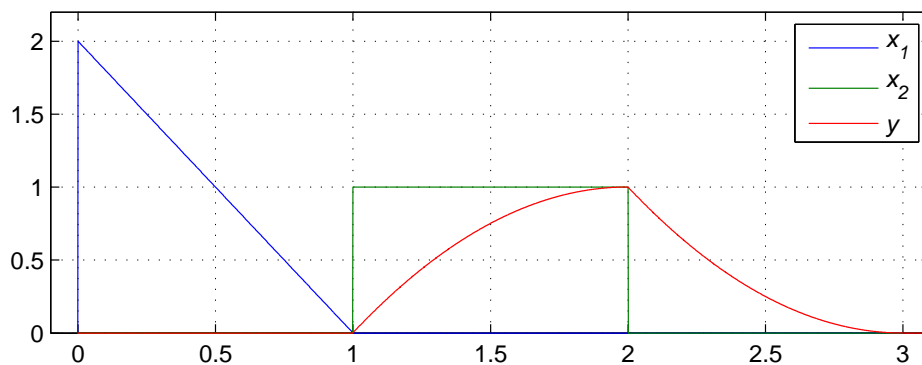
EXERCICI 2.1 Calculeu i representeu gràficament $\Pi(t) * \Pi(t)$. Expressen el resultat en funció de $\Lambda(t)$, escalada i traslladada si s'escau.

EXERCICI 2.2 Calculeu i representeu gràficament la convolució dels senyals x_1 i x_2 de l' [Exercici 1.1](#).

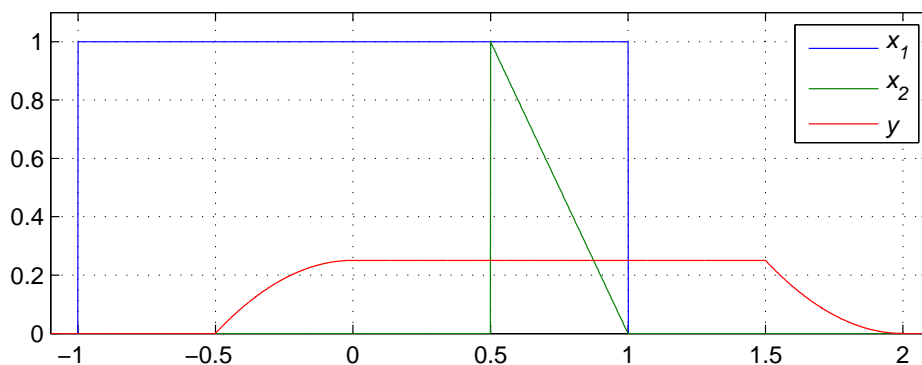
EXERCICI 2.3 Calculeu i representeu gràficament $\Lambda(t) * \Pi(t)$.

EXERCICI 2.4 Calculeu i representeu gràficament la convolució dels senyals x_2 i x_3 de l' [Exercici 1.3](#)

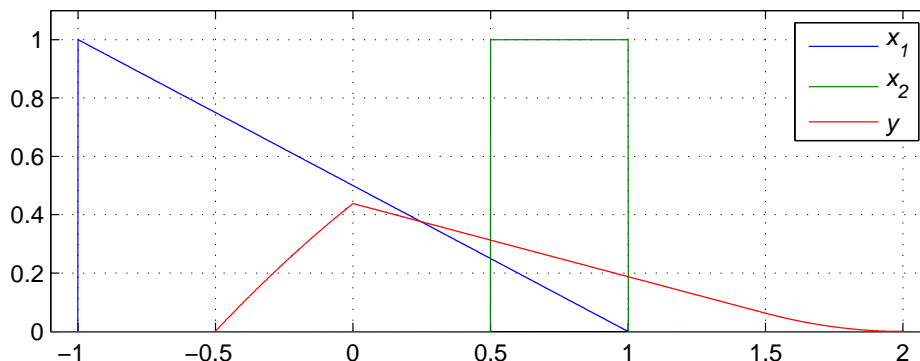
EXERCICI 2.5 A partir dels senyals $x_1(t) = 2\Lambda(t)u(t)$ i $x_2(t) = \Pi(t - 1.5)$ calculeu i representeu gràficament amb **Octave** $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$. Comproveu que els valors en els extrems de cada interval d'integració que considereu coincideixen. Verifiqueu que el resultat correspon al de la figura.



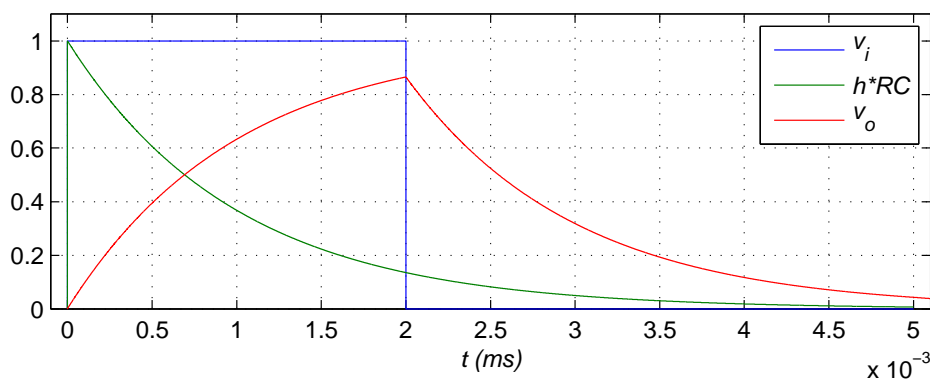
EXERCICI 2.6 A partir dels senyals $x_1(t) = \Pi(\frac{t}{2})$ i $x_2(t) = \Lambda(\frac{t-0.5}{0.5})u(t - 0.5)$ calculeu i representeu gràficament amb **Octave** $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$. Comproveu que els valors en els extrems de cada interval d'integració que considereu coincideixen. Verifiqueu que el resultat correspon al de la figura.



EXERCICI 2.7 A partir dels senyals $x_1(t) = \Lambda(\frac{t+1}{2})u(t+1)$ i $x_2(t) = \Pi(\frac{t-0.75}{0.5})$ calculeu i representeu gràficament amb Octave $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$. Comproveu que els valors en els extrems de cada interval d'integració que considereu coincideixen. Verifiqueu que el resultat correspon al de la figura.



EXERCICI 2.8 Calculeu la resposta d'un circuit RC davant una excitació $v_i(t) = \Pi(\frac{t(ms)-1}{2})$ amb $R = 1k\Omega$ i $C = 1\mu F$. En primer lloc determineu la funció de xarxa $H(s)$, després la resposta impulsional $h(t)$ i finalment la resposta $v_o(t) = v_i(t) * h(t)$. Comproveu que els valors en els extrems de cada interval d'integració que considereu coincideixen. Verifiqueu que el resultat correspon al de la figura.



3 Finestres en el domini temporal

El fet d'enfinestrar un senyal en el domini temporal té efectes gens intuïtius sobre el seu espectre en el domini freqüencial. Amb la finalitat d'aprofundir en aquests efectes enfinestrarem la suma de dos senyals sinusoidals i estudiarem com l'espectre original, format per dos parells de deltes, es veu modificat.

Quan els dos senyals tenen freqüències properes voldrem usar finestres que no *barregin* aquestes freqüències i permetin distingir les deltes originals en el domini freqüencial. Aquestes finestres tenen com a característica una bona resolució freqüencial.

Quan un dels dos senyals té una amplitud molt menor a la de l'altre voldrem usar finestres que evitin que el senyal de menor amplitud quedi *emmascarat* pel de major amplitud. Aquestes finestres han de tenir uns lòbuls secundaris que decreixin ràpidament. Aquest decreixement es mesura amb dos criteris: relació lòbul principal a secundari i decreixement asimptòtic.

Habitualment la millora en un dels paràmetres (resolució freqüencial) va acompanyada d'un empitjorament en l'altre (lòbuls secundaris petits), de manera que com és habitual en enginyeria caldrà trobar un compromís entre aquests paràmetres per a cada situació.

En endavant considerarem les quatre finestres de la [Figura 1](#), totes elles de durada T segons i que per comoditat considerem centrades a l'origen de temps:

$$w_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right), \text{ Rectangular} \quad (1)$$

$$w_2(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T/2}\right), \text{ Triangular} \quad (2)$$

$$w_3(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)\left(0.50 + 0.50 \cos\left(2\pi \frac{1}{T}t\right)\right), \text{ Hanning} \quad (3)$$

$$w_4(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)\left(0.54 + 0.46 \cos\left(2\pi \frac{1}{T}t\right)\right), \text{ Hamming} \quad (4)$$

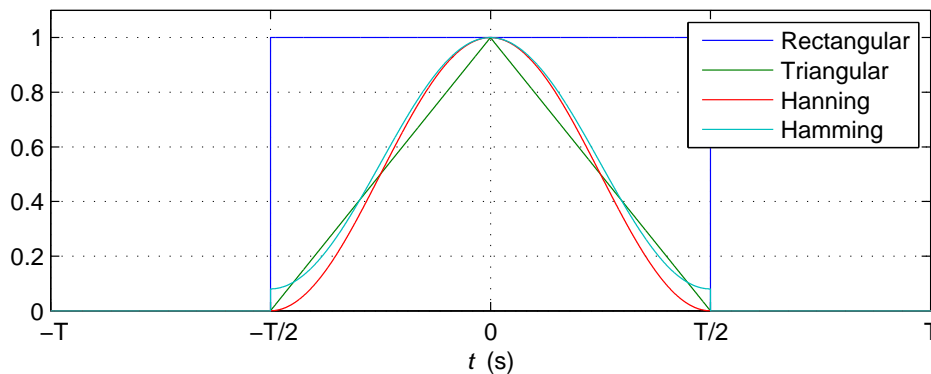


Figura 1: Quatre finestres amb diferents propietats.

EXERCICI 3.1 Calculeu la TF de cadascuna de les quatre finestres de la [Figura 1](#): $W_i(f) = \text{TF}\{w_i(t)\}$. Utilitzeu l'Octave per a fer una representació gràfica amb $T = 0.1$ s. La representació gràfica us pot ser útil per a calcular els paràmetres més importants que defineixen una

finestra: a) amplada del lòbul principal BW_{ML} , b) amplada de banda a 3dB BW_{3dB} , c) relació lòbul principal a secundari (MSR) i d) comportament asimptòtic $1/f^n$.

Exemple per a la finestra rectangular, $i = 1$. $W_1(f) = TF\{w_1(t)\} = TF\{\Pi(\frac{t}{T})\} = Tsinc(fT)$. Abans de fer una representació gràfica podem extreure la següent informació. $W_1(f)$ a l'origen, $f = 0$, té amplitud T , és a dir 0.1. Presenta zeros cada $f = \frac{1}{T} = 10$ Hz. De manera que $BW_{ML} = 20$ Hz. A més, com que la funció $w_1(t)$ és discontinua el comportament asimptòtic és $1/f$.

Useu el següent codi per a fer una representació freqüencial que inclou els deu primers zeros.

```

T=0.1;
f=linspace(-10/T,10/T,1e4);
W1=T*sinc(f*T);
plot(f,abs(W1)),grid on
  
```

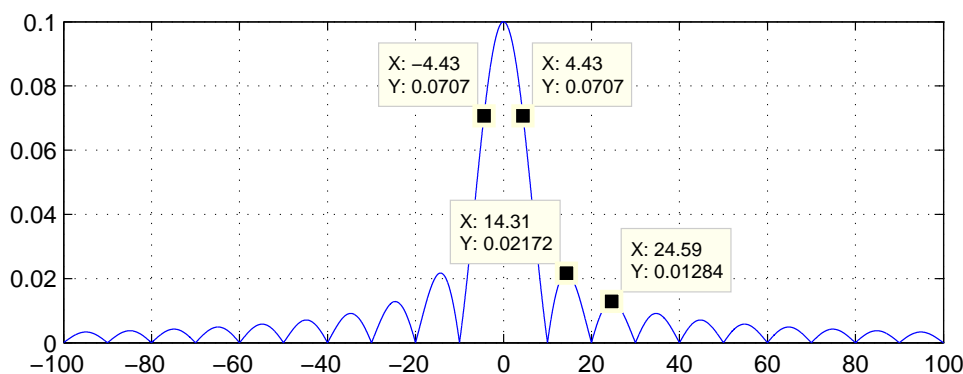


Figura 2: Finestra rectangular en el domini freqüencial amb $T = 0.1$ s.

A partir del resultat mostrat a la [Figura 2](#) podem verificar l'amplitud a l'origen i l'amplada del lòbul principal. La freqüència a la qual l'amplitud és $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ens permet calcular BW_{3dB} . Efectivament podem afirmar que $BW_{3dB} = 8.86$ Hz i en general que $BW_{3dB} = \frac{0.89}{T}$. La relació lòbul principal a secundari és $MSR = 20 \log_{10}(0.1/0.02172) = 13.26$ dB. Amb Octave aquesta relació la calcularíem així: $MSR = 20 * \log_{10}(1/.02172)$. També disposem de la informació per a calcular la relació lòbul principal a terciari: $MTR = 20 \log_{10}(0.1/0.01284) = 17.83$ dB.

Resum de resultats per a la finestra rectangular: a) $BW_{ML} = 20$ Hz i en general $BW_{ML} = 2/T$, b) $BW_{3dB} = 8.86$ Hz i en general $BW_{3dB} = \frac{0.89}{T}$, c) $MSR = 13.26$ dB d) comportament asimptòtic $1/f$ o 20 dB/dec.

EXERCICI 3.2 Considereu $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$ amb $A_1 = A_2 = 1$, $f_1 = 1$ kHz i $f_2 = f_1 + 20$ Hz. Expresses analíticament el resultat d'enfinestrar $x(t)$ amb les quatre finestres anteriors. En concret, expresseu $y_i(t) = x(t)w_i(t)$ en el domini freqüencial: $Y_i(f) = X(f) * W_i(f)$, feu-ne una representació gràfica i comenteu l'efecte que cada finestra té en l'espectre resultant. Intenteu relacioneu aquest efecte amb els paràmetres calculats anteriorment.

Exemple per a la finestra rectangular, $i = 1$. $Y_1(f) = X(f) * W_1(f)$, que en el nostre cas particular es pot reescriure com $Y_1(f) = (A_1(\frac{\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)}{2}) + A_2(\frac{\delta(f-f_2)+\delta(f+f_2)}{2})) * (Tsinc(fT))$. Utilitzant la propietat de convolució d'una delta amb una funció, $\delta(f - f_0) * X(f) = X(f - f_0)$, obtenim finalment $Y_1(f) = \frac{T}{2}(A_1 * (\text{sinc}((f - f_1)T) + \text{sinc}((f + f_1)T)) + A_2 * (\text{sinc}((f - f_2)T) + \text{sinc}((f + f_2)T)))$.

En les següents figures el resultat d' Y_1 s'ha normalitzat per tal que el màxim coincideixi amb 0.5, l'amplitud de les deltes de l'espectre original. Això es pot fer dividint pel màxim i multiplicant per 0.5:

```
plot(f,0.5*abs(Y1)/max(abs(Y1)),grid on
```

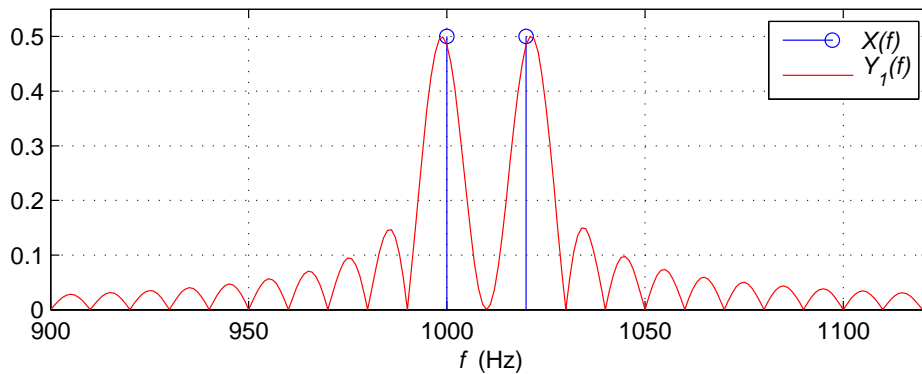


Figura 3: Mòdul d' $Y_1(f)$ per a dos cosinus d'igual amplitud separats 20 Hz.

A la [Figura 3](#) podem visualitzar en blau les deltes de l'espectre original. En vermell tenim la TF del senyal $x(t)$ en finestrat. Es pot comprovar que és possible identificar la freqüència dels dos cosinus originals pel fet que el lòbul principal de la finestra triangular és més estret que la separació entre les freqüències. Si la separació entre les freqüències disminuís els lòbuls principals de les dues sinc se superposarien i no podríem identificar el senyal original. Alternativament, si el temps d'observació disminueix (si T és menor) l'amplada del lòbul principal augmenta i s'observa el mateix efecte. Com a efecte marginal es pot dir que els màxims de $Y_1(f)$ estan lleugerament desplaçats respecte a f_1 i f_2 . Finalment, es pot dir que els lòbuls secundaris tenen una amplitud comparable a la que tindria el lòbul principal provinent d'un cosinus d'amplitud 4 cops menor.

EXERCICI 3.3 Considereu ara $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$ amb $A_1 = A_2 = 1$, $f_1 = 1$ kHz i $f_2 = f_1 + 40$ Hz. Compareu els resultats amb els de l'exercici anterior.

Figura per a la finestra rectangular: [Figura 4](#).

EXERCICI 3.4 Considereu ara $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$ amb $A_1 = 1$, $A_2 = 0.1$, $f_1 = 1$ kHz i $f_2 = f_1 + 40$ Hz. Compareu els resultats amb els dels exercicis anteriors.

Figura per a la finestra rectangular: [Figura 5](#).

EXERCICI 3.5 Considereu ara $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$ amb $A_1 = 1$, $A_2 = 0.02$, $f_1 = 1$ kHz i $f_2 = f_1 + 100$ Hz. Compareu els resultats amb els dels exercicis anteriors.

Figura per a la finestra rectangular: [Figura 6](#).

EXERCICI 3.6 Com a exercici de síntesi, compareu l'efecte que té cada finestra sobre el senyal estudiat. Per exemple, una finestra rectangular pot identificar senyals separats més de $2/T$ sempre que tinguin igual amplitud, mentre que una finestra triangular els confon i necessita una diferència doble per a identificar-los, $4/T$. O bé, els lòbuls secundaris de la finestra rectangular *emascaren* el lòbul principal d'un altre senyal d'amplitud 10 cops menor separat $4/T$, mentre

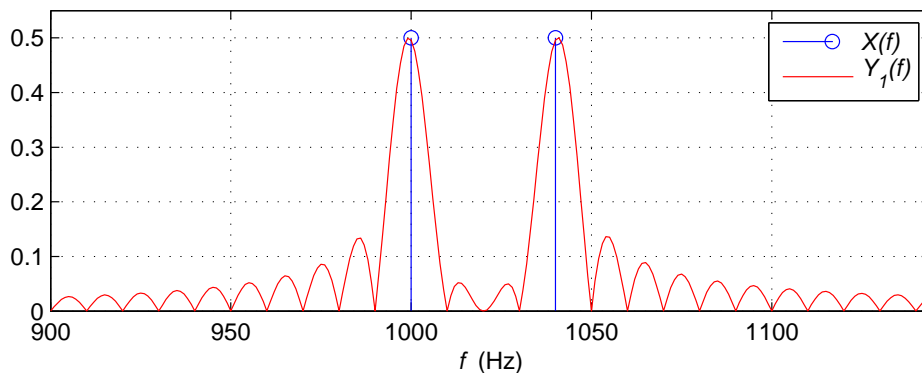


Figura 4: Mòdul d' $Y_1(f)$ per a dos cosinus d'igual amplitud separats 40 Hz.

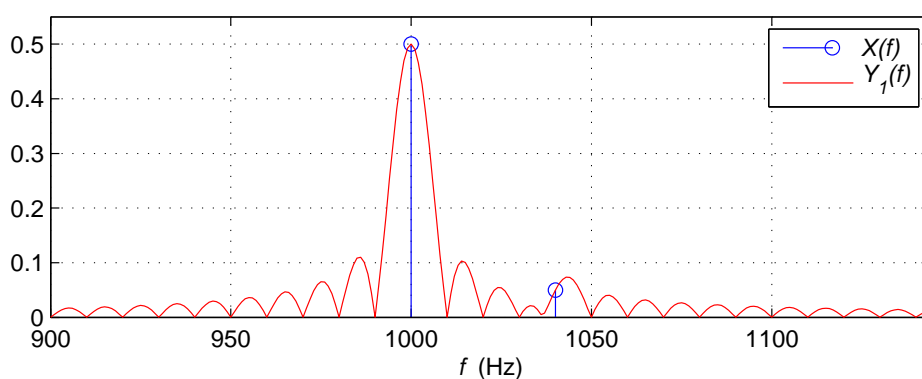


Figura 5: Mòdul d' $Y_1(f)$ per a dos cosinus d'amplitud 10 cops diferent separats 40 Hz.

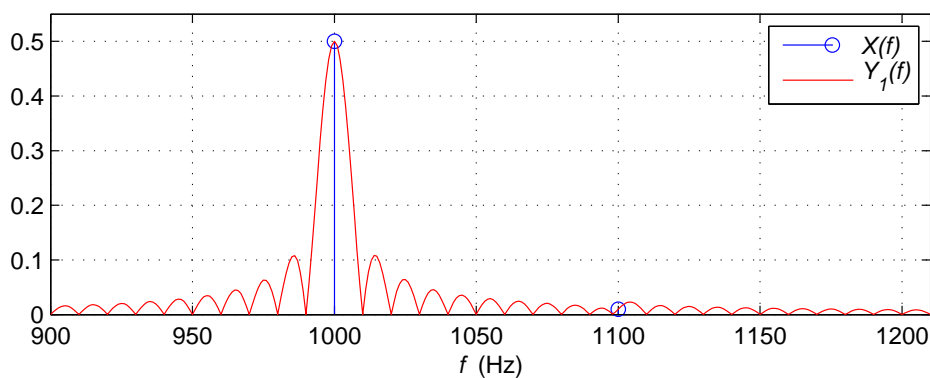


Figura 6: Mòdul d' $Y_1(f)$ per a dos cosinus d'amplitud 50 cops diferent separats 100 Hz.

que l'espectre obtingut amb la finestra de Hamming presenta dos únics lòbuls d'amplitud i a la freqüència tals que permeten identificar els senyals originals.

4 Finestres en el domini freqüencial

Ara estudiarem l'efecte d'enfinestrar senyals en el domini freqüencial. Ens centrarem en l'efecte d'enfinestrar en el domini freqüencial una discontinuïtat en el domini temporal, per exemple la funció *step*, o $u(t)$, a partir de la qual es poden crear per superposició formes d'ona més complexes. Quan un senyal passa per un filtre d'amplada de banda finit es parla d'una limitació en banda. En una limitació en banda només es consideren algunes components freqüencials, per exemple les inferiors a B Hz. Així, un filtre amb $H(f) = \Pi(\frac{f}{2B})$, equivaldria a un enfinestrat en el domini freqüencial amb una finestra rectangular de $-B$ Hz a B Hz.

EXERCICI 4.1 Considereu que el senyal $x(t) = u(t)$ passa per un filtre definit per $H(f) = \Pi(\frac{f}{2B})$, amb $B = 1$ MHz. En concret, calculeu i representeu gràficament el senyal filtrat $y(t)$, que es pot escriure com la TF⁻¹ de $Y(f) = U(f)H(f)$, que al seu temps es pot reescriure com $y(t) = u(t) * h(t)$.

Ajut per al càlcul numèric d'integrals. Podríem començar avaluant $Y(f) = U(f)H(f)$ usant $U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$ i $H(f) = \Pi(\frac{f}{2B})$, per a després passar al domini temporal, però la dificultat d'avaluar la TF⁻¹ fa recomanable buscar altres alternatives ¹. Podríem avaluar directament la convolució que apareix en el domini temporal $y(t) = u(t) * h(t)$ usant $h(t) = \text{TF}^{-1}\{H(f)\} = \text{TF}^{-1}\{\Pi(\frac{f}{2B})\} = 2B\text{sinc}(2Bt)$, obtinguda a partir de la propietat de dualitat. Aquesta convolució és $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau) d\tau$, que es pot reescriure, considerant quan $u(t) = 0$, com $y(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$ i finalment, substituint $h(t)$ per l'expressió anterior $y(t) = \int_{-\infty}^t 2B\text{sinc}(2B\tau) d\tau$. Malauradament només coneixem el valor d'aquesta integral a $t = -\infty$ (val zero), a $t = 0$ (val 0.5) i a $t = \infty$ (val 1). Per a altres valors hem d'ajudar-nos de la integral indefinida expressada com a sèrie, $\int \frac{\sin(ax)}{x} dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} \dots$, o bé calcular numèricament la integral. Aquesta darrera opció significa aproximar $\int_a^b f(x) dx$ per $\sum_{n=0}^{N-1} f(a + n\Delta)\Delta$, amb $\Delta = \frac{b-a}{N}$. L'aproximació s'acosta al valor de la integral quan $\Delta \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$). Aquest sumatori es pot calcular usant, per exemple, l'Octave. Habitualment l'error de l'aproximació es controla disminuint Δ (augmentant N) fins que no s'observen canvis en el resultat. En el nostre cas, tenim una dificultat afegida, ja que el limit d'integració inferior, a , val $-\infty$ (per a una Δ finita això implicaria un sumatori amb N infinit). Per tant, ens cal una aproximació més, consistent en truncar la integral i començar-la en un valor finit (a de valor finit) enlloc de $-\infty$. En aquest cas hi ha un tros d'integral que estem ignorant: $\int_{-\infty}^a f(x) dx$. Aquesta aproximació serà vàlida si la integral en aquest interval és de valor petit, cosa que passa en el cas d'integrar una $\text{sinc}(x)$, ja que és una funció amb el seu màxim a l'origen, $x = 0$, i que decreix cap als extrems com $1/x$. L'error d'aquesta aproximació es controla disminuint a (acostant-la a $-\infty$ fins que no s'observen canvis en el resultat).

Aquí teniu un codi gens optimitzat de com calcular numèricament $y(t) = \int_{-\infty}^t 2B\text{sinc}(2B\tau) d\tau$:

```
% parametres finestra (amplada de banda d'1MHz)
B=1e6;

%_salt_d'integracio (defineixo Delta)
Delta=1e-2/B;

% defineixo l'interval_de_t_discret_en_el_qual_vull_calcular_la_integral
```

¹De fet, aquesta alternativa i la que es proposa a continuació arriben a la mateixa integral després d'un nombre major o menor de *passes*.

```
%_a=-10/B_i_b=10/B_com_a_maxim
t=-10/B:Delta:10/B;

%_aproximo_la_integral_des_de_tau=t(1)=a_fins_tau=t(i)=b
y=0*t;
for_i=1:length(t);
    tau=t(1:i);
    f=2*B*sinc(tau*2*B);
    y(i)=sum(f)*Delta;
end

%_representacio_grafica
figure,plot(t,y),grid_on
```

L'error introduït per aquest procés disminueix fent Δ menor. A més, l'error de truncament disminueix fent a menor (més negatiu). Podeu provar a modificar (augmentar o disminuir) aquests dos paràmetres i veure si s'aprecien canvis en el resultat.

Un codi una mica més optimitzat és aquest:

```
% parametres finestra (amplada de banda d' 1MHz)
B=1e6;

%_interval_d'integracio (defineixo Delta)
Delta=1e-2/B;

%
t=-10/B:Delta:10/B;

% funcio a integrar
f=2*B*sinc(t*2*B);

% aproximo la integral des de tau=t(1)=a fins tau=t(i)=b
y=0*t;
for i=1:length(t);
    y(i)=sum(f(1:i));
end
y=y*Delta;

% representacio grafica
figure,plot(t,y),grid on
```

Finalment un codi sense cap iteració, que aprofita les possibilitats de càlcul matricial de l'Octave:

```
% aproximo la integral des de tau=t(1)=a fins tau=t(i)=b
y=0*t;
fp=f(ones(1,length(t)),:);
M=tril(ones(length(t)));
dy=fp.*M;
```

```
y=sum(dy,2)*Delta;
```

Una altra opció es usar funcions pròpies de l'Octave, les quals són molt efectives. Per exemple, la funció **quad.m** permet calcular integrals numèriques. En el nostre cas, la funció **conv.m** ens permet realitzar la integral numèrica per a un límit d'integració variable (pensem que la integral originàriament era una convolució):

```
% aproximo la integral des de tau=t(1)=a fins tau=t(i)=b
% utilitzo la funcio convolucio 'conv.m'
y=conv(f,ones (size(f)));
y=y(1:length(t))*Delta;
```

Aquí teniu dues representació gràfica de la sortida $y(t)$. En la [Figura 7](#) podeu observar la forma d'ona obtinguda i en concret el seu arriestat, instant de temps i magnitud del màxim arriestat, i la velocitat de transició del graó filtrat de 0 a 1. En la [Figura 8](#) podeu quantificar aquests paràmetres. L'arriestat màxim es produeix a $t_{max} = \pm 0.5 \text{ us} = \pm \frac{1}{2B}$ i té un valor que és un 10% superior a l'amplitud del graó, $Ring_{max} \simeq 0.1 \simeq 10\%$. El temps de pujada t_{up} , definit com el temps de passar del 10% al 90% del valor final és $t_{up} = 0.46 \text{ us} \simeq \frac{1}{2B}$

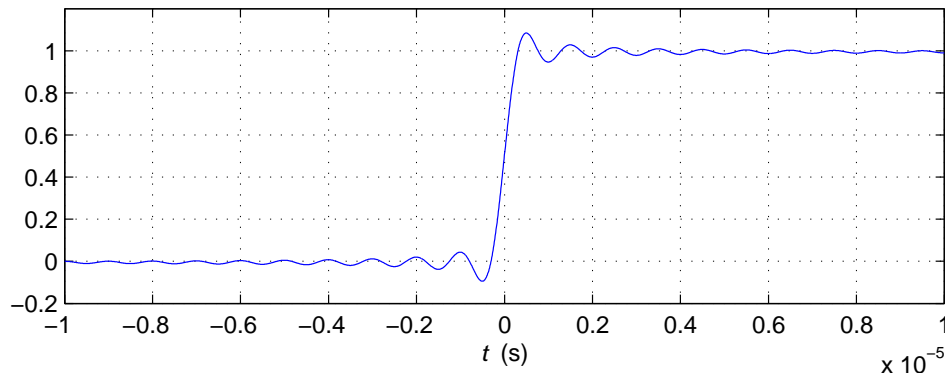


Figura 7: Filtrat d'un graó amb un pas-baix ideal d'amplada de banda $B = 1 \text{ MHz}$.

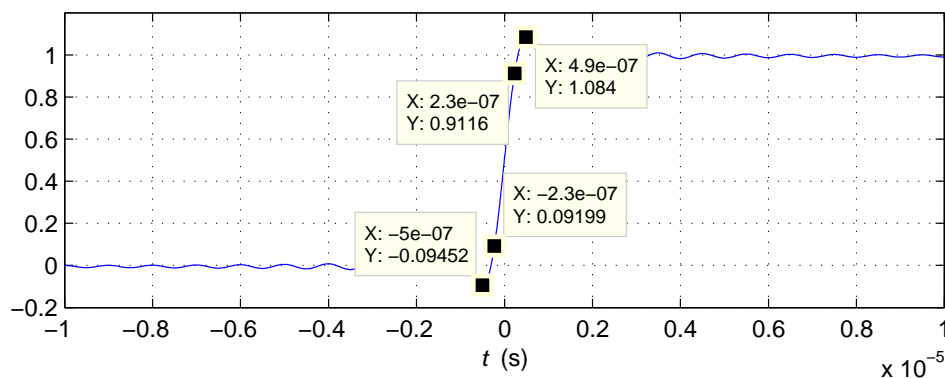


Figura 8: Filtrat d'un graó amb un pas-baix ideal d'amplada de banda $B = 1 \text{ MHz}$.

EXERCICI 4.2 Repetiu l'exercici anterior amb altres valors de B , per exemple $B = 10$ MHz i $B = 100$ kHz, per tal de verificar que es compleix $t_{max} = \pm \frac{1}{2B}$, $Ring_{max} \simeq 10\%$ i $t_{up} \simeq \frac{1}{2B}$ per a qualsevol valor de B quan el senyal està limitat en banda per un pas-baix ideal d'amplada de banda B Hz. Observeu que si això es verifica, significa que, si bé quan B augmenta es produeix un escalat en temps (t_{max} i t_{up} menor, el valor màxim de l'arissat no varia amb B i es manté proper al 10% (excepte per a $B \rightarrow \infty$).

EXERCICI 4.3 Repetiu l'*Exercici 4.1* considerant que el senyal $x(t) = u(t)$ passa per un filtre definit per $H(f) = \Lambda(\frac{f}{B})$ i compareu el resultat d'ambdós exercicis. En la *Figura 9* podeu observar que l'arissat del filtre triangular no va més enllà del valor màxim (1) i mínim (0) del graó. En canvi, què passa amb el temps de pujada t_{up} ? Doneu un valor en funció de B .

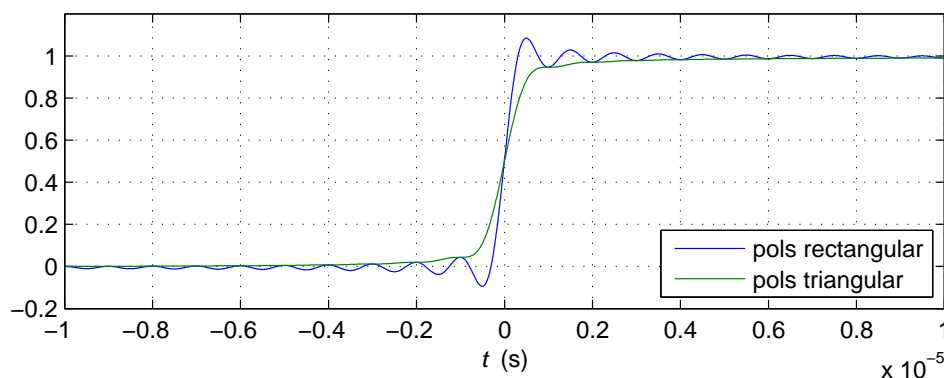


Figura 9: Filtrat d'un graó amb un filtre triangular d'amplada $B = 1$ MHz.

EXERCICI 4.4 Les respostes obtingudes en els anteriors exercicis corresponen a filtres ideals amb una resposta impulsional no causal i per tant no són filtres realitzables. No obstant, caracteritzen bé l'efecte de truncar una sèrie de Fourier, o de truncar la integral numèrica en el càlcul d'una TF^{-1} , o d'altres operacions que es poden fer en processar un senyal digital.

A continuació considereu la resposta impulsional d'un filtre RC amb $H(s) = \frac{1}{RCs+1}$. Per tal de comparar amb els exercicis anteriors igualarem la freqüència de tall a l'amplada de banda d'un filtre rectangular ideal: $\frac{1}{2\pi RC} = B$. En aquest cas, la resposta impulsional es calcula fàcilment usant la transformada de Laplace inversa: $h(t) = \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) u(t)$.

```

% amplada de banda a -3dB d'1MHz
B=1e6;
RC=1/2/pi/B;%tau=RC

% interval d'integració (defineixo Delta)
Delta=1e-3/B;

%
t=-0.1/B:Delta:2/B;

% H(s)=1/(RCs+1)
num=1;den=[RC 1];
  
```

```

figure,bode(tf(num,den))

% resposta impulsional
h=1/RC*exp(-t/RC).*heaviside(t);
figure, plot(t,h), title('resposta_impulsional'), grid on

% resposta al grao
y=conv(h,ones(size(h)));
y=y(1:length(t))*Delta;
figure, plot(t,y), title('resposta_al_grao'), grid on

```

La instrucció `bode(tf(num,den))` ens fa una gràfica del diagrama de Bode d' $H(s)$ i per a usar `tf.m` ens cal el *package* `octave-control`. La funció `heaviside.m` és la funció graó $u(t)$ i ens cal el *package* `octave-specfun`.

Naturalment observarem un creixement exponencial sense arissat. Calculeu el t_{up} d'un RC en funció de B .

EXERCICI 4.5 Considerem ara un filtre pas-baix de $2n$ ordre amb $H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$. Per tal de comparar amb els exercicis anteriors igualarem el paràmetre ω_0 a l'amplada de banda d'un filtre rectangular ideal: $\frac{\omega_0}{2\pi} = B$. La resposta impulsional també la calcularem usant la transformada de Laplace inversa. La descomposició en fraccions simples se simplificarà usant la funció `residue.m`² amb el següent codi:

```

% H(s)=wo^2/(s^2+2*xi*wo*s+wo^2)
wo=2*pi*B;xi=1/sqrt(2);
num=wo^2;den=[1 2*xi*wo wo^2];
figure,bode(tf(num,den))

% resposta impulsional
[R,P,K]=residue(num,den);
h=2*abs(R(1))*cos(imag(P(1))*t+angle(R(1))).*exp(real(P(1))*t).*heaviside(t);

```

Observeu l'instant de temps t_{max} i l'amplitud de l'arissat $Ring_{max}$ i el temps de pujada t_{up} per a diferents valors de B i de $0 < \xi < 1$ i comenteu les conclusions a les que arribeu.

²A *Circuits i Sistemes Lineals* teniu un document, [ExempleOctaveDinamics.pdf](#), que en fa una explicació detallada.