Senyals i Sistemes
Prova Final. 11 de juny de 2012

Temps per a la resolució: 4 hores. Darrer dia revisió: 18 de juny

1 Exercicis curts

1. La transformada de Fourier (TF) d'$x(t) = \Pi(\frac{t}{T})$ és $X(f) =\mid T \mid sinc(fT)$.

   a) Demostreu que la TF d'$x(t) = \Pi(t)$ és $X(f) = sinc(f)$ usant la definicio de TF: $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\, dt$.

   b) Demostreu la validesa de l'enunciat de l'exercici usant el resultat anterior i la propietat d'escalat: si $X(f)$ és la TF d'$x(t)$ aleshores $X(\frac{f}{a})\frac{1}{|a|}$ és la TF d'$x(at)$.

2. Considereu els senyals $x_1(t) = \Pi(\frac{t}{T})$ i $x_2(t) = \Pi(\frac{t}{2T})$.

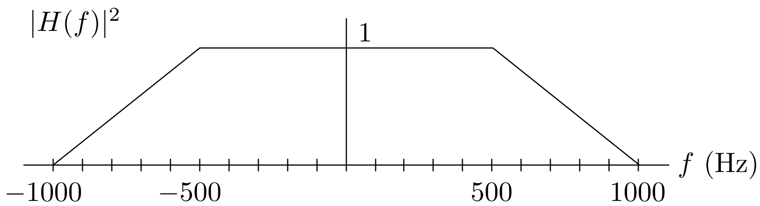
   a) Representeu gràficament la seva convolució $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ per a $T = 1$. Podeu usar el mètode semi-gràfic.

   b) Calculeu l'àrea d'$y(t)$. Quina informació aporta aquesta àrea sobre l'espectre d'$Y(f)$?

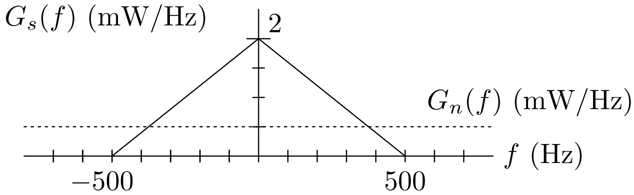
   c) Calculeu $Y(0)$, $Y(\frac{1}{T})$, $Y(\frac{1}{2T})$ i $Y(\frac{1}{3T})$.

3. Considereu ara el producte dels senyals de l'exercici anterior: $z(t) = x_1(t)x_2(t)$. Quina és la TF, $Z(f)$, de $z(t)$? En el resultat només pot aparèixer una sinc (feu atenció en la representació gràfica de $z(t)$).

4. Disposeu d'un filtre pas-baix $H(f)$ amb el modul al quadrat representat a la figura. Quina és l'amplada de banda equivalent de soroll B_N d'$H(f)$?



5. Disposeu d'un senyal $s(t)$ i un soroll $n(t)$ amb una densitat espectral de potència $G_s(f)$ i $G_n(f)$ respectivament com la representada a la figura.



a) Quina és la relació senyal soroll SNR a la sortida del filtre de l'exercici anterior?

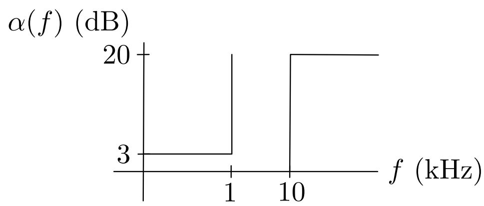
b) Quin hauria de ser el valor de $G_n(f)$ per tal que augmentés 10 dB la SNR?

c) Si substituïm $s(t)$ per $As(t)$, quin hauria de ser el valor d'A per tal que augmentés 10 dB la SNR?

6. Compareu els avantatges i inconvenients de les modulacions d'amplitud i angulars. Quina modulació escolliríeu en una comunicació mòbil?

7. Compareu els avantatges i inconvenients dels filtres de Butterworth i de Chebyshev. Considereu un filtre de Butterworth i un de Chebyshev, tots dos pas-baix, d'igual ordre n i amb la mateixa freqüència de pas ω_p. Quin d'ells tindrà una amplada de banda equivalent de soroll menor?

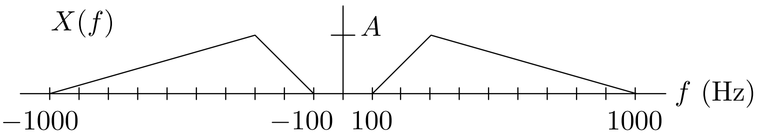
8. Doneu els valors R i C del filtre de Butterworth de 1r ordre que compleix aquesta plantilla. En teniu prou amb els coneixement de *Circuits i Sistemes Lineals*.



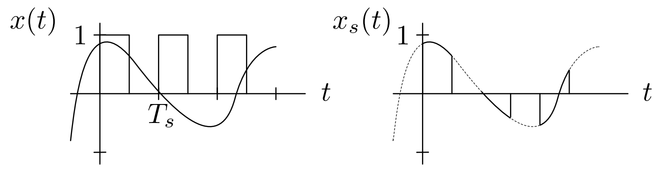
9. Per què un filtre de Butterworth de 2n ordre té una amplada de banda equivalent de soroll menor que un de 1r ordre amb la mateixa freqüència de tall? Podeu justificar la resposta amb una representació gràfica aproximada del mòdul de la resposta en freqüència. Com podeu augmentar la SNR d'un senyal amb soroll blanc en el qual podeu triar l'ordre del filtre?

2 Mostreig de senyals

Considerem un senyal continu $x(t)$ amb informació d'interès. Al fet de dividir el temps en intervals de mida T_s i de cada interval només agafar un tros del senyal $x(t)$ en diem mostrejar. Al senyal obtingut com a resultat d'aquest mostreig a la freqüència $f_s = 1/T_s$ en diem $x_s(t)$. El teorema de mostreig ens diu que si el senyal $x(t)$ té una amplada de banda B, el senyal $x_s(t)$ conté la mateixa informació que $x(t)$ sempre que mostrejem a una freqüència $f_s > 2B$.

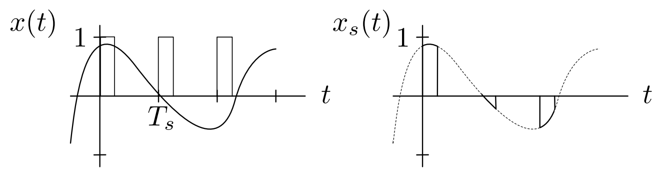


a) Considereu que el mostreig consistent en multiplicar el senyal $x(t)$, amb la TF de la figura anterior, per $s(t)$, un senyal quadrat d'amplitud 0 i 1, amb un rendiment de cicle del 50% i de freqüència f_s el doble de la necessària segons el teorema de mostreig. A la figura inferior podeu veure l'efecte d'aquest mostreig. Feu una representació gràfica de la TF d'$x_s(t)$. Els primers coeficients de la seva sèrie exponencial de Fourier d'$s(t)$ són: $c_0 = 0.5$, $c_1 = 1/\pi$, $c_2 = 0$, $c_3 = -1/3\pi$, $c_4 = 0$ i $c_5 = 1/5\pi$.



b) Justifiqueu la recuperació del senyal original $x(t)$ a partir del senyal mostrejat $x_s(t)$ usant un filtre pas-baix. Dibuixeu la plantilla necessària per a dissenyar aquest filtre si s'especifica que l'atenuació de la banda de pas ha de ser menor que 1 dB i l'atenuació en la banda de rebuig superior a 20 dB.

c) El mostreig de senyals pot ser útil per a multiplexar en temps dos o més senyals. Centrem-nos en el cas de dos senyals. Per tal d'encabir els dos senyals en un període T_s, es multiplica un d'ells per $s(t)$ i l'altre per $s(t)$ retardat $T_s/2$. Si el rendiment és del 50%, no hi ha espai lliure entre els dos senyals i la recuperació posterior es fa difícil, sinó impossible, ja que l'element de commutació necessita un temps t_{canvi} per a canviar d'estat. Així, per tal de facilitar aquesta recuperació es redueix el rendiment de cicle, per exemple al 25% (les mostres duren $T_s/4$), per tal que entre una mostra d'un senyal i la següent mostra de l'altre senyal hi hagi temps suficient ($Ts/4$ en aquest cas) per a fer la commutació. La figura inferior mostra el mostreig d'un senyal usant un rendiment de cicle del 25%.



Calculeu el rendiment de cicle necessari si els nostres elements de commutació necessiten un temps $t_{canvi} = 50\,\mu s$ per a canviar d'estat i usem $f_s = 3\,\text{kHz}$. Quin és l'efecte que té reduir el rendiment de cicle?

3 El receptor superheterodí usat en ràdio comercial FM

L'espectre de la ràdio comercial FM està format per 100 canals a intervals de 200 kHz. El primer d'aquests canals es troba centrat a la freqüència de 88.1 MHz i el darrer a 107.9 MHz. Cadascun d'aquests canals consisteix en una portadora a la qual se li ha aplicat una modulació FM amb un senyal d'àudio d'amplada de banda $B = 15\,\text{kHz}$ i amplitud màxima $A = 1\,\text{V}$, usant $k_f = 75\,\text{kHz/V}$.

Aquest senyal es recupera usant un receptor superheterodí de freqüència intermèdia $f_{FI} = 10.7\,\text{MHz}$. Aquest receptor usa una freqüència variable per a traslladar el canal desitjat a la f_{FI}. Un cop el senyal a freqüència intermèdia, s'aplica un filtrat efectiu abans de realitzar la desmodulació FM.

a) Useu la regla de Carson per tal de determinar l'amplada de banda de cada canal. Quina és l'espai buit entre dos canals? Dibuixeu la plantilla corresponent al pas-banda necessari per a separar un canal dels altres si s'especifica que l'atenuació de la banda de pas ha de ser menor que 3 dB i l'atenuació en la banda de rebuig superior a 20 dB. Dividiu la freqüència central del darrer canal per l'espai buit entre canals (a major valor, major dificultat per a realitzar el filtre).

b) Calculeu la freqüència de l'oscil·lador usat per a traslladar el primer canal, centrat a 88.1 MHz, a f_{FI}. Determineu amb precisió on comença i on acaba la freqüència imatge f_{Image} d'aquest canal.

c) Calculeu la freqüència de l'oscil·lador usat per a traslladar el darrer canal, centrat a 107.9 MHz, a f_{FI}. Determineu amb precisió on comença i on acaba la freqüència imatge f_{Image} d'aquest canal.

d) Considereu ara la freqüència imatge corresponent a la totalitat del canals. On comença i on acaba? Dibuixeu la plantilla corresponent al pas-alt necessari per a eliminar la f_{Image} si s'especifica que l'atenuació de la banda de pas ha de ser menor que 3 dB i l'atenuació en la banda de rebuig superior a 20 dB. Dividiu la freqüència central del primer canal per l'espai buit entre la f_{Image} i l'inici de l'espectre de ràdio.

e) Un cop heu traslladat el canal seleccionat a f_{IF}, dibuixeu la plantilla corresponent al pas-banda necessari per separar el canal seleccionat dels altres si s'especifica que l'atenuació de la banda de pas ha de ser menor que 3 dB i l'atenuació en la banda de rebuig superior a 20 dB. Dividiu la freqüència central, en aquest cas f_{IF}, per l'espai buit entre canals. Compareu aquest valor amb el de l'apartat a).

f) Què passaria si volguéssim facilitar la construcció del filtre anterior disminuint f_{IF}? Podeu calcular la f_{Image} corresponent al darrer canal, centrat a 107.9 MHz, si uséssim una $f_{FI} = 9.9\,\text{MHz}$.