

Anàlisi freqüencial de senyals i sistemes en temps discret

1. Es diu que dos senyals discrets, $s_k(n)$ i $s_l(n)$, són ortogonals sobre l'interval $[N_1, N_2]$ si

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} s_k(n) s_l^*(n) = \begin{cases} A_k, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

Si $A_k=1$, es diu que els senyals són ortonormals.

- a) Demostreu la relació

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} N \delta(k - lN)$$

- b) Il·lustreu la validesa de la relació de l'apartat (a) dibuixant per a cada valor de $k=1, 2, \dots, 6$, els senyals $s_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{6}kn}$, $n=0, 1, \dots, 5$. [Nota: Per a k i n donats, el senyal $s_k(n)$ es pot representar com a un vector en el pla complex].
- c) Demostreu que els senyals harmònicament relacionats

$$s_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

són ortogonals sobre qualsevol interval de longitud N .

2. Calculeu la transformada de Fourier dels següents senyals:

- a) $x(n)=u(n)-u(n-6)$
 b) $x(n)=2^n u(-n)$
 c) $x(n)=(1/4)^n u(n+4)$
 d) $x(n)=(a^n \sin \omega_0 n)u(n) \quad |a|<1$
 e) $x(n)=-2, -1, 0, 1, 2$

↑

3. Calculeu la transformada inversa de Fourier dels següents senyals:

a) $X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_0 \\ 1, & \omega_0 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$

b) $X(e^{j\omega}) = \cos^2 \omega$

4. Determineu la DFT de 8 punts dels senyal

$$x(n) = \{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

i representeu la seva magnitud i fase.

5. Sigui un senyal analògic d'ample de banda $B=3$ kHz. Volem utilitzar una DFT de $N=2^m$ punts per a calcular l'espectre del senyal amb una resolució menor o igual a 50 Hz. Determineu (a) la velocitat de mostreig mínima, (b) el nombre mínim de mostres i (c) la longitud mínima del registre del senyal analògic.

6. Demostreu les següents propietats:

a) La DFT d'un senyal real i parell en n és real i parell en k .

b) La DFT d'un senyal real i imparell en n és imaginària pura i imparell en k .

7. Per a la transformada

$$X(k) = e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 2e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi}{2}k}, \quad k=0,1,2,3$$

determineu la corresponent seqüència $x(n)$ i representeu-la gràficament.