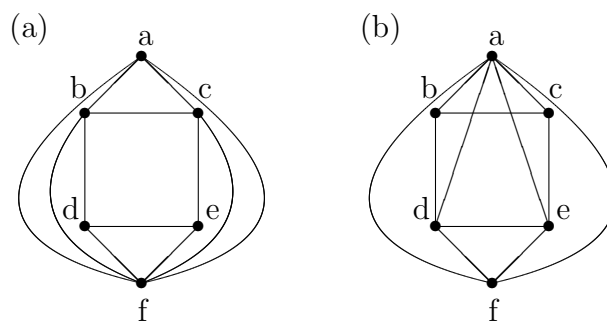


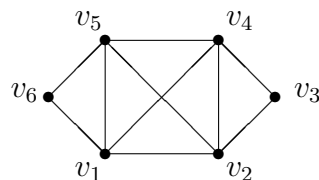
FONAMENTS MATEMÀTICS PER A TIC

EXPLORACIÓ DE GRAFS I ARBRES - PROBLEMES

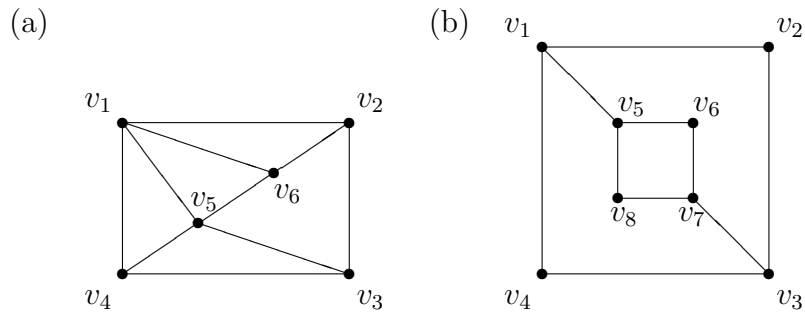
1. Digueu si els grafs següents tenen o no algun recorregut o circuit eulerià.



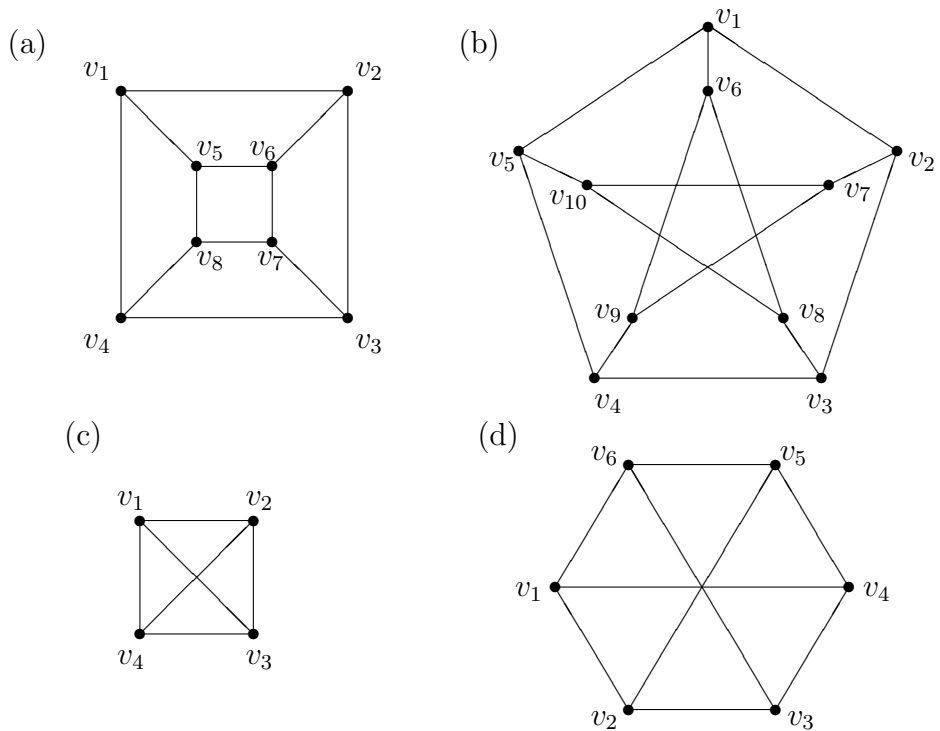
2. Proveu que el graf següent és eulerià i trobeu un circuit eulerià contingut en ell:



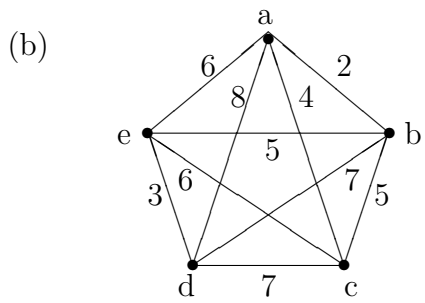
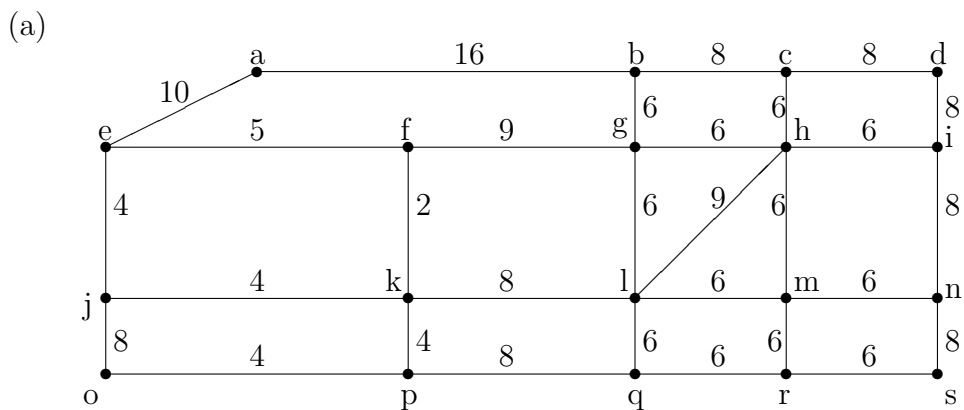
3. Demostreu que si un graf és regular d'ordre parell i mida senar, aleshores no és eulerià.
4. Construïu un graf eulerià que no sigui hamiltonià i un graf hamiltonià que no sigui eulerià.
5. És possible posar en successió totes les fitxes d'un dòmino de manera que coincideixin les puntuacions dels extrems en contacte i que els dos extrems lliures tinguin la mateixa puntuació?
6. Esbrineu si els grafs següents són eulerians o hamiltonians. En el seu cas, trobeu el circuit eulerià o el cicle hamiltonià corresponent.



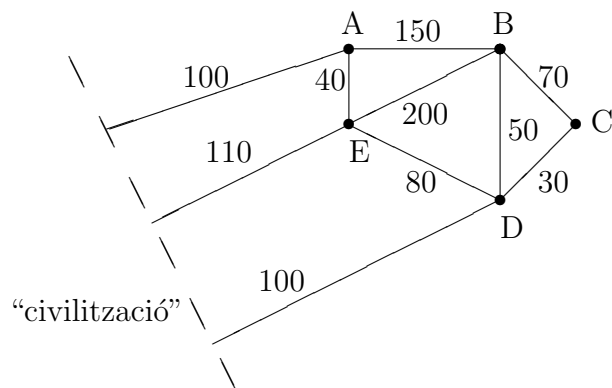
7. Sigui G un graf bipartit amb $V = V_1 \cup V_2$ la partició del conjunt de vèrtexs. Demostreu que:
 - (a) Si G és hamiltonià, aleshores $|V_1| = |V_2|$.
 - (b) Si G té un camí hamiltonià, aleshores $||V_1| - |V_2|| \leq 1$.
 - (c) Si $m = n + 1$, aleshores $K_{m,n}$ té almenys un camí hamiltonià.
8. Determineu tots els arbres d'ordre 4. Quants n'hi ha que siguin no isomorfs? I d'ordre 6?
9. Quins arbres són grafs regulars?
10. Dibuixeu tots els arbres T tals que T^c també sigui arbre. Quants n'hi ha?
11. Sigui T un arbre d'ordre n on tots els vèrtex que no són de grau 1 són de grau 4. Proveu que el nombre de vèrtexs de grau 1 és $2k + 2$, sent k el nombre de vèrtexs de grau 4.
12. Siguin $T_1 = (V_1, A_1)$, $T_2 = (V_2, A_2)$ dos arbres amb $|A_1| = 17$ i $|V_2| = 2|V_1|$. Determineu $|V_1|$, $|V_2|$ i $|A_2|$.
13. Sigui $T = (V, A)$ un arbre. Si T tingués 4 vèrtexs de grau 2, 1 de grau 3, 2 de grau 4 i 1 de grau 5, quants vèrtexs de grau 1 tindria?
14. Sigui $G = (V, A)$ un graf connex d'ordre $n \geq 2$, amb un vèrtex de grau 1, i la resta de grau superior o igual a 2. Proveu que G ha de tenir un cicle.
15. El bosc $G = (V, A)$ conté 26 vèrtexs i 21 arestes. Quantes components connexes té?
16. Demostreu que un graf connex d'ordre n té un mínim de $n - 1$ arestes.
17. Trobeu arbres generadors per als grafs següents:



18. Trobeu un arbre generador minimal dels grafs ponderats següents:

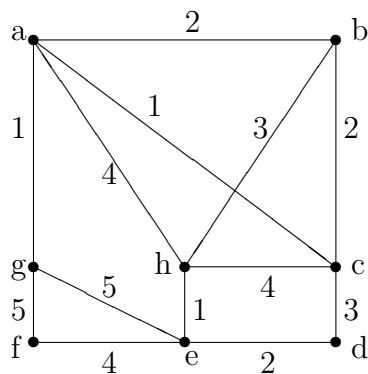


19. En una regió de la selva hi ha 5 poblats indígenes que viuen aïllats de la "civilització" i aïllats entre si. El govern vol construir camins per comunicar-los entre si i amb la civilització. Un estudi dona els següents costos en milers de dòlars:



- Quina és la xarxa de camins més fàcil de construir per tal de comunicar tots els poblats?
- Perquè aquesta xarxa conté el camí de C a D amb tota seguretat?
- Una organització ecologista diu que el possible camí de C a D passa per una zona on viu una espècie de goril·les única al món. Encariria molt el cost de l'obra, si no es pogués fer el camí de C a D ?

20. Sigui (G, ω) el graf ponderat:



- Quina és la matriu d'adjacència de G ? Calculeu els graus de cada vèrtex a partir d'aquesta matriu.
- Calculeu l'excentricitat dels vèrtexs a i d . Quin és el radi del graf G ? I el diàmetre? Indiqueu els vèrtexs centrals.
- El graf G és eulerià? Per què? És possible afegir una aresta a G de manera que contingui un circuit que passi per totes les arestes una sola vegada?
- Trobeu un arbre generador minimal de (G, ω)