FONAMENTS MATEMÀTICS PER A TIC

PROBLEMES TEMA 1 - CONJUNTS I RELACIONS

1. Es considera un alfabet format per tres lletres $A = \{a, b, c\}$. Determinar el conjunt P_4 de totes les paraules que es poden formar amb quatre o menys lletres. Calcular el cardinal d'aquest conjunt. Si tenim un alfabet amb m lletres, quin serà el cardinal del conjunt P_n de les paraules amb n o menys lletres?

2. En el conjunt referencial $U = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 32\}$ es consideren els subconjunts A format pels divisors de 24 i B format pels divisors de 32.
   (a) Determinar extensivament A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A} \cup \bar{B}$ i $\bar{A} \cap \bar{B}$.
   (b) Comprovar que es compleixen les dues lleis de De Morgan.

3. S'ha realitzat un sondeig en un conjunt de 100 persones respecte a les seves preferències sobre tres diaris d'àmplia difusió: 12 persones manifesten llegir només La Vanguardia, 11 només El Periódico i 6 només l'Avui; 7 persones llegeixen La Vanguardia i El Periódico, 4 La Vanguardia i l'Avui, 3 El Periódico i l'Avui i 5 persones llegeixen tots tres diaris.
   (a) Quantes persones en total llegeixen l'Avui?
   (b) Quantes persones llegeixen La Vanguardia però no l'Avui?
   (c) Quantes persones no llegeixen cap dels tres diaris?

4. Per a un univers finit $U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es poden representar tots els seus conjunts continguts de la forma següent: si $A \subseteq U$ escrivim una successió de 0's i 1's $a_1, a_2, ..., a_n$ de manera que $a_i = 1$ si $x_i \in A$ i $a_i = 0$ si $x_i \notin A$. A partir d'aquesta representació, trobeu representacions per als conjunts següents:

   $$\text{(i)} \quad \bar{A} \qquad \text{(ii)} \quad A \setminus B \qquad \text{(iii)} \quad A \oplus B$$

5. En el conjunt $A = \{a, b, c, d\}$ està definida la relació binària donada per $R = \{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$. Representar gràficament i expressar matricialment la relació R. Sobre la gràfica i amb la matriu, decidir quines propietats de les relacions verifica i quines no.

6. En el conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters definim la relació binària $a\ R\ b$ si tots dos nombres obtenen el mateix residu en la divisió entera per 5. Ho denotarem per $a \equiv b\ (mod\ 5)$.

(a) Provar que la definició és equivalent a: $a \equiv b\ (mod\ 5) \Leftrightarrow a - b = \dot{5}$

(b) Determinar que es tracta d'una relació binària d'equivalència.

(c) Descriure les classes d'equivalència i formar el conjunt quocient $\mathbb{Z}/5$.

7. Sobre el conjunt $A = \{3, 5, 15, 25, 45, 75, 125\}$ es considera la relació binària $a\ R\ b$ sii a és múltiple de b.

   (a) Provar que R és una relació binària d'ordre parcial.

   (b) Construir el seu diagrama de Hasse.

   (c) Determinar totes les cadenes maximals contingudes i indicar els elements extremals del conjunt A per la relació R.

8. Donat un conjunt A amb $|A| = 3$ es considera el conjunt de les seves parts $\mathcal{P}(A)$ i en aquest últim és defineix la relació binària "contingut o igual" ($\subseteq$).

   (a) Provar que $\subseteq$ és una relació binària d'ordre parcial en $\mathcal{P}(A)$.

   (b) Construir el diagrama de Hasse, determinar totes les cadenes maximals contingudes i dir quins elements són els extremals.

   (c) Si $|A| = 4$, quantes cadenes maximals es podrien construir en $\mathcal{P}(A)$ amb la relació $\subseteq$? I si $|A| = n$?

9. Considerem en el conjunt D dels divisors positius del nombre 45 la relació binària "és divisor de".

   (a) Construir el diagrama de Hasse d'aquesta relació.

   (b) Determinar totes les cadenes maximals contingudes i donar els elements extremals.