

# CAMPS ESCALARS

EPSEM-MA3 // Matemàtiques II // versió 01

1. Calculeu els dominis dels camps escalars següents:

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{2x - y}} \qquad (b) \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}{x^2 + y^2}$$

$$(c) \quad f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2} \qquad (d) \quad f(x, y) = \ln(x - y^2)$$

$$(e) \quad f(x, y) = xy \qquad (f) \quad f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$(g) \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} \qquad (h) \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - y}}$$

2. Representeu gràficament algunes corbes de nivell dels camps escalars següents:

$$(a) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad (b) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(c) \quad f(x, y) = xy \qquad (d) \quad f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$(e) \quad f(x, y) = 9x^2 + 4y^2 \qquad (f) \quad f(x, y) = 2x - y$$

3. Trobeu les derivades parcials dels camps escalars següents i calculeu el seu valor en els punts indicats.

$$(a) \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy \qquad \text{en } (x, y) = (1, 0)$$

$$(b) \quad f(x, y) = xy + \frac{x}{y} \qquad \text{en } (x, y) = (1, 1)$$

$$(c) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{en } (x, y) = (0, 1)$$

$$(d) \quad f(x, y) = e^{xy} \qquad \text{en } (x, y) = (1, 0)$$

$$(e) \quad f(x, y) = \ln \left[ \frac{\sin(x + 1)}{\sqrt{y}} \right] \qquad \text{en } (x, y) = (1, 1)$$

$$(f) \quad f(x, y) = e^{\sin(\frac{x}{y})} \qquad \text{en } (x, y) = (\pi, 1)$$

4. Calculeu les derivades direccionals dels camps escalars següents en el punts i direccions indicades.

(a)  $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$  en  $(x, y) = (3, 4)$  i direcció  $(4, -3)$

(b)  $f(x, y) = y - e^x \sin y$  en  $(x, y) = (\ln 3, \pi/2)$  i direcció  $(1, 1)$

(c)  $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy - x$  en  $(x, y) = (1, 1)$  i direcció  $(1, -1)$

(d)  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  en  $(x, y) = (1, 1)$  i direcció  $(2, 1)$

(e)  $f(x, y) = x^2 e^y$  en  $(x, y) = (2, 0)$  i direcció  $(1, 1)$

5. Calculeu la derivada direccional de  $f(x, y) = x^2 - y^2$  en el punt  $(1, 1)$  i la direcció que forma un angle de  $60^\circ$  amb la direcció positiva de l'eix OX.

6. Suposem una funció densitat  $f(x, y) = 48 - \frac{3}{4}x^2 - 3y^2$ . Trobeu el coeficient de variació de la densitat.

(a) En el punt  $(1, -1)$  i en la direcció de disminució més ràpida de la densitat.

(b) En el punt  $(1, 2)$  i en la direcció  $i$ .

(c) En el punt  $(2, 2)$  i en la direcció contrària a la de l'origen.

7. Trobeu la derivada direccional de  $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  en el punt  $(a, b)$  i en la direcció cap a  $(b, a)$ .

i) si  $a < b$

ii) si  $a > b$

8. La temperatura en cada punt d'una placa metàl·lica ve donada per la funció  $T(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x$ .

(a) En quina direcció augmenta la temperatura més ràpidament en el punt  $(0, 0)$ ? Quin és el coeficient de variació?

(b) En quina direcció disminueix la temperatura més ràpidament en el punt citat?

9. Una funció real de variable vectorial  $f(x, y)$  diferenciable en el punt  $(1, -1)$  té, en aquest punt, unes derivades direccionals de valor 3 segons el vector que uneix  $(1, -1)$  amb el punt  $(2, -1)$  i de valor 1 segons la direcció del vector que uneix  $(1, -1)$  amb el punt  $(1, 0)$ . Calculeu el  $\nabla f(1, -1)$  i la derivada direccional de  $f$  en el punt  $(1, -1)$  segons el vector que uneix  $(1, -1)$  amb el punt  $(2, 0)$ .
10. Un camp escalar  $f(x, y)$  diferenciable en  $P(1, 2)$  té, en aquest punt, derivada direccional de valor 6 en la direcció que uneix el punt  $(1, 2)$  amb  $(5, 5)$  i derivada direccional de valor  $-2$  en la direcció de que uneix els punts  $(1, 2)$  i  $(1, 0)$ .
- (a) Calculeu  $\nabla f(1, 2)$ .
- (b) Existeix alguna direcció  $u$  tal que  $(D_u f)(P) = 7$ ?
- (c) Calculeu en quina direcció  $u$ ,  $(D_u f)(P) = 4$
11. Un camp escalar  $f(x, y)$  diferenciable en  $P(0, 2)$  té, en aquest punt, derivada direccional de valor 6 en la direcció que uneix  $P$  amb  $Q(0, 3)$  i derivada direccional de valor  $-2$  en la direcció que uneix  $P$  amb  $R(4, 5)$ .
- (a) Calculeu  $\nabla f(0, 2)$ .
- (b) Existeix alguna direcció  $u$  tal que  $(D_u f)(P) = 14$ ? Raoneu la resposta.
12. Calculeu les derivades parcials de segon ordre dels següents camps escalars.

$$(a) \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy \qquad (b) \quad f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$$

$$(c) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (d) \quad f(x, y) = e^{\sin(\frac{x}{y})}$$

13. Demostreu que la funció  $u = \arctan(y/x)$  satisfà l'equació de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

14. Demostreu que la funció  $u = A \sin(a\lambda t + \phi) \sin \lambda x$  satisfà l'equació de les vibracions de la corda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

15. Trobeu els extrems locals de les funcions següents:

(a)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$

(b)  $f(x, y) = 4x + 2y - y^2 + xy$

(c)  $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$

(d)  $f(x, y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

(e)  $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$

(f)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

(g)  $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

(h)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

(i)  $f(x, y) = e^x \cos y$