# 5. RESPOSTA FREQÜENCIAL DE CIRCUITS I SISTEMES LINIALS

## 5.1. INTRODUCCIÓ

Fins ara hem vist què li passava a un senyal sinusoïdal quan passava per un circuit (sistema linial). Aquest circuit el representàvem per la seva funció de xarxa, i si era estable, vam veure que a la sortida no s'alterava la forma, és a dir, teníem un cosinus de la mateixa freqüència, però amplitud i fase diferent.

$$A\cos(\omega t+\phi_1) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow B\cos(\omega t+\phi_2)$$

$\downarrow$ sistema linial i estable

A partir d'aquí, fem algunes definicions:

- Amplificació: $\frac{B}{A} = |H(j\omega)|$
  És la relació entre les amplificacions de la sortida i l'entrada. Ja havíem vist que això era el mòdul de $H(j\omega)$.
- Desfassament: $\phi_2 - \phi_1 = \arg H(j\omega)$
  És la diferència entre la fase de la sortida i la de l'entrada, que ja havíem vist que és l'argument de $H(j\omega)$, ja que: $\phi_2=\phi_1+\arg H(j\omega)$.
- Guany: $20\log_{10}\frac{B}{A} = 20\log_{10}|H(j\omega)| = 10\log_{10}|H(j\omega)|^2$
  Aquesta definició és nova. Ho volem posar en escala logarítmica, i posem 20 log perquè ho volem relacionar no amb les tensions, sinó amb les potències, i sabem que aquesta depèn de la tensió al quadrat.

En aquest tema treballarem força amb escales logarítmiques, per això cal que recordem bé les propietats del logaritmes:

$$\log x^y = y\cdot\log x$$

$$\log(x\cdot y) = \log x + \log y$$

Fins ara hem vist què passava amb un senyal de una freqüència concreta quan passava per un circuit. Ara voldrem saber què passa a aquestes magnituds (amplitud, desfasament i guany) quan anem variant la freqüència del senyal que passa pel circuit. Al final, acabarem parlant de filtres, concepte que ja hem introduït en el tema anterior.

## 5.1.1. OBTENCIÓ GRÀFICA DE LES CORBES D'AMPLIFICACIÓ I DESFASAMENT

Ens basarem, de moment, amb la variació de l'amplitud i el desfasament en funció de la freqüència, ja que les corbes de guany es basen directament en les d'amplificació, però en escala logarítmica.

Recordem com es podia expressar $H(s)$ i $H(j\omega)$. Recordem que eren un quocient de polinomis com aquests:

$D(s) = s^n + a \cdot s^{n-1} + \dots$

↳ aquest coeficient sempre és 1.

$N(s) = a' \cdot s^m + b' s^{m-1} + \dots$

↳ degut a aquest valor ens apareix $H_0$

Tenint en compte això, tenim una $H(s)$ com la següent:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H_0 \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_k)}$$

Si a partir d'aquí ens interessa $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = H_0 \frac{\prod (j\omega - z_i)}{\prod (j\omega - p_k)}$$

Busquem ara el modul d'aquesta funció sabent que el mòdul d'un producte és el producte dels mòduls.

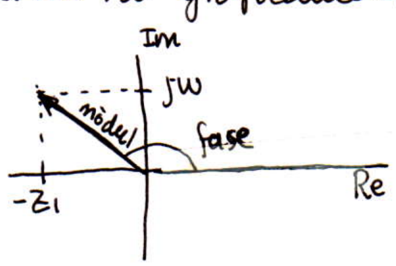
$$|H(j\omega)| = |H_0| \frac{\prod |j\omega - z_i|}{\prod |j\omega - p_k|}$$

Busquem també l'argument sabent que l'argument d'un producte és la suma d'arguments.

$$\arg H(j\omega) = \arg H_0 + \sum \arg (j\omega - z_i) - \sum \arg (j\omega - p_k)$$

Fins ara hem dibuixat els vectors amb origen en (0,0), llargada el mòdul i angle l'argument. Seria el mateix si els dibuixéssim des de l'inici fins el fi, sabent que els escrivim (final - inici).

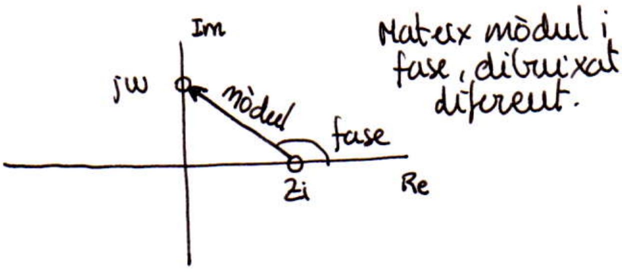
Vegem-ho gràficament:




$(j\omega - z_i)$

part imaginària ↳ part real, tot i que podria ser imaginari.

Fins ara ho fèiem així.




$(j\omega - z_i)$

final - inici

També ho podem fer així.

Dibuixant el vector d'aquesta nova manera, podrem veure com evoluciona el mòdul i la fase, buscant-ho per uns quants valors. Després es pot dibuixar la corba de mòdul i la de fase. Vegem-ho per un cas concret:

Exemple:

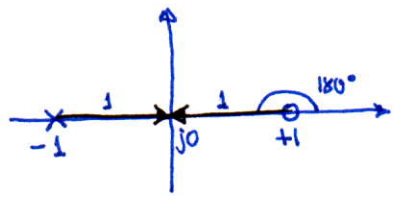
Suposem que tenim una funció de xarxa com la següent:

$$H(j\omega) = 1\,\frac{j\omega - 1}{j\omega + 1} \qquad H_0 = 1 \qquad \begin{matrix}\text{pol a } -1 \\ \text{zero a } +1\end{matrix}$$

Dibuixarem el vector corresponent al pol i al zero per diferents valors de $\omega$, i veurem l'evolució del mòdul i de la fase.

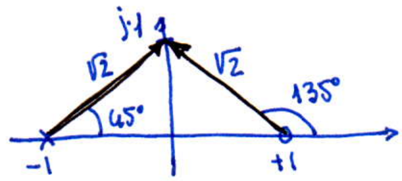
- $\omega = 0 \rightarrow |H(j0)| = \underbrace{1}_{H_0} \cdot \frac{|-1|}{|1|} = 1$

  $\arg H(j0) = \underbrace{0°}_{H_0} + \underbrace{180°}_{zero} - \underbrace{0°}_{pol} = 180°$



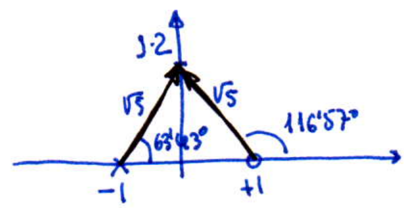

- $\omega = 1 \rightarrow |H(j1)| = 1\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

  $\arg H(j1) = 0° + 135° - 45° = 90°$




- $\omega = 2 \rightarrow |H(j2)| = 1\,\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$

  $\arg H(j2) = 0° + 116'57° - 63'43° \simeq 53°$

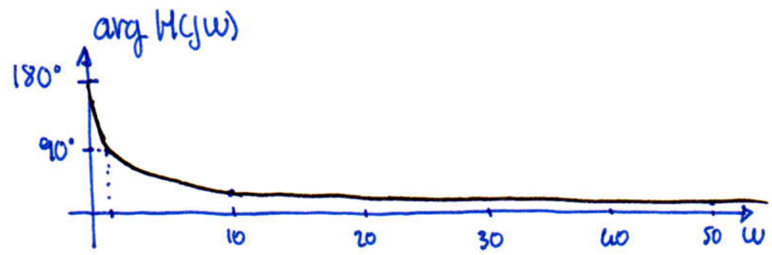



Veiem que el mòdul sempre és 1. Si mirem uns quants valors més de la fase amb Octave trobem:

$\omega = 3 \Rightarrow 36'9°$ , $\omega = 5 \Rightarrow 22'6°$ , $\omega = 10 \Rightarrow 11'4°$ , $\omega = 20 \Rightarrow 5'7°$

$\omega = 50 \Rightarrow 2'2°$ , $\omega = 100 \Rightarrow 1'1°$ , $\omega = 1000 \Rightarrow 0'1°$

Així podríem dibuixar unes gràfiques del mòdul i la fase en funció de $\omega$:

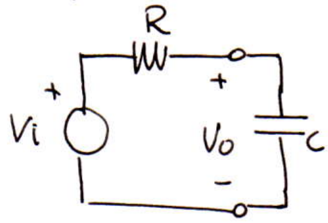

Veient-ho gràficament, es veu de seguida què fa el circuit. No amplifica i desfasa. Per tant, en aquest cas, seria un desfasador.
També podríem buscar els punts analíticament:

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega - 1}{j\omega + 1} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega^2+1}{\omega^2+1} = 1$$ Veiem de seguida que és 1.

L'argument l'hauríem d'anar calculant.

## 5.1.2. RC PAS-BAIX

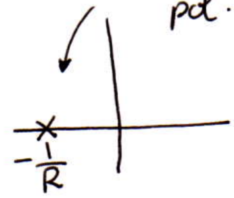
Després de veure aquest exemple, veiem un cas d'un circuit simple i conegut, com és un RC que ja vam veure que es comportava com a pas baix.



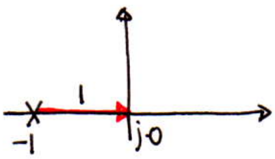

$$H(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{RC}\,\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

Veiem que $H_0 = \frac{1}{RC}$ $\quad s = j\omega$

Té un sol pol.



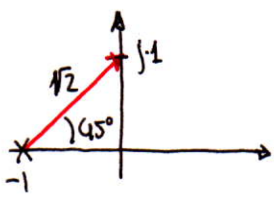

Fem ara el mateix que en l'exemple anterior suposant que $RC=1$ i per tant $H_0 = 1$. Agafem uns quants valors de $\omega$.




$$|H(j\omega)| = \frac{1}{j\omega+1}$$

$$|H(j0)| = \frac{1}{1} = 1$$

$$\arg H(j0) = \underbrace{0°}_{H_0} - \underbrace{0°}_{pol} = 0°$$

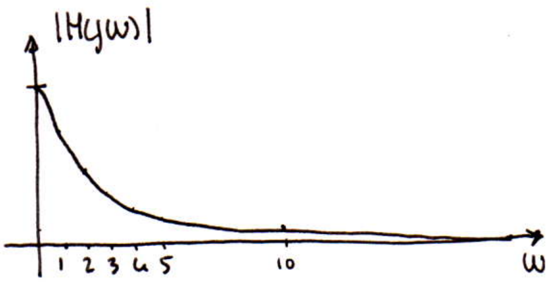


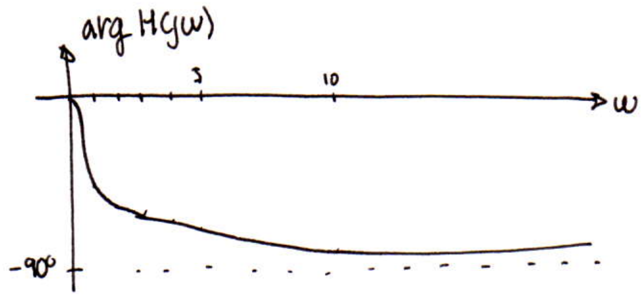

$$|H(j1)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg H(j1) = 0° - 45° = -45°$$

| $\omega$ | $\lvert H(j\omega)\rvert$ | $\arg H(j\omega)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0° |
| 1 | $1/\sqrt{2} = 0'707$ | $-45°$ |
| 2 | $1/\sqrt{5} = 0'447$ | $-63'4°$ |
| 3 | $1/\sqrt{10} = 0'316$ | $-71'5°$ |
| 4 | $1/\sqrt{17} = 0'24$ | $-76°$ |
| ⋮ | | |
| $\infty$ | 0 | $-90°$ |

Gràficament tindríem:




Això aniria millor mirar-ho amb una escala logarítmica, es veuria millor què passa a les freqüències baixes, que és quan varia més el mòdul i la fase. Veiem, però, que és un filtre pas baix, que deixa passar les freqüències baixes, i les altres no. La fase també varia segons la freqüència.

Ara ho hem fet per $RC=1$, però ho podríem haver fet en general i tindríem:

$$H(j\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + \frac{1}{RC}} \longrightarrow |H(j\omega)| = \frac{1/RC}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}}$$

$$\arg H(j\omega) = -\operatorname{arctg} \omega \cdot RC$$

El mòdul serà el mateix, però el què ara passava per $\omega = 1$, ara passa per $\omega = \frac{1}{RC}$

$\omega = 0 \rightarrow |H(j0)| = 1$, $\arg H(j\omega) = 0°$, $\quad \omega = \frac{1}{RC} \rightarrow |H(j\frac{1}{RC})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\arg H(j\frac{1}{RC}) = -45°$

Fins ara hem vist que això es comporta com un filtre pas-baix. Ara ens interessarà saber fins on deixa passar. Haurem de definir un parell de conceptes que seran útils per saber-ho.

<u>Freqüència de tall</u>:

Definim freqüència de tall com aquella per la qual la potència ha baixat a la meitat respecte el seu màxim.

En aquest cas d'un Pas-baix, la potència màxima la tenim per $\omega = 0$.

Normalment treballarem amb escala logarítmica, i dividir la potència per 2 voldrà dir restar 3dB. Així, de la freqüència de tall en direm també freqüència a -3dB:

$$\omega_{tall} = \omega_{-3dB}$$

<u>Banda de pas</u>: Freqüències que deixarà passar el filtre.

Pel filtre pas baix, definirem banda de pas com aquella banda de freqüències que és entre 0 i $\omega_{-3dB}$. En general serà aquella banda de freqüències per les quals la potència no ha baixat per sota dels 3dB respecte la màxima.

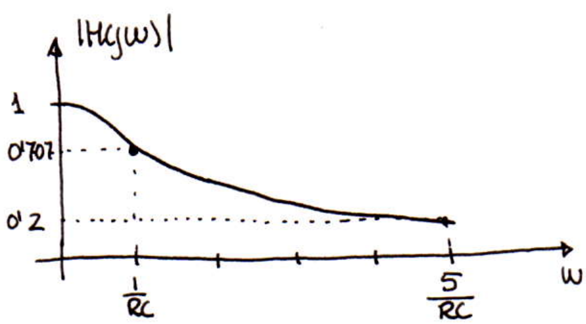
Per $\omega = 0$ tenim $P_{max}$

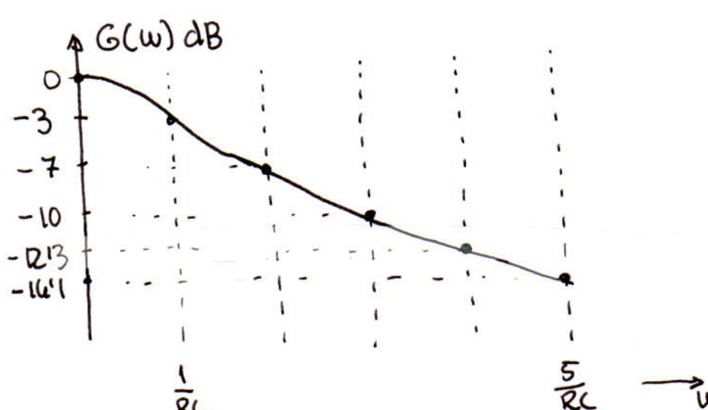
Per $\omega = \omega_{tall}$ tenim $P_{out} = \frac{P_{max}}{2} \rightarrow P_{out}(dBm) = P_{max}(dBm) - 3dB$

$$10 \log \frac{P_{max}}{2} = 10 \log P_{max} - 10 \log 2 = P_{max}(dBm) - 3dB$$

Potència meitat en tensió és:

$P \sim V^2 \Rightarrow \frac{P_{max}}{2} \sim \left(\frac{V_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow |V_{out}| = \frac{|V_{max}|}{\sqrt{2}}$ La tensió ens la dóna $|H(j\omega)|$




$0'707 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_{tall} = \omega_{-3dB} = \frac{1}{RC}$

Aquesta és la freqüència de tall

↑ freqüència de tall $= \omega_{tall} = \omega_{-3dB}$

Banda de pas

Veiem doncs que aquest filtre tindria una $\omega_{tall} = 1/RC$ i la banda de pas aniria de $\omega = 0$ a $\omega = 1/RC$.

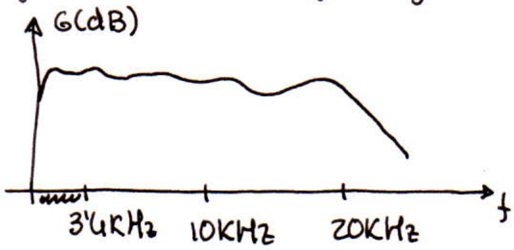
## 5.2. DIAGRAMA ASSIMPTÒTIC DE BODE

Estem veient que $H(j\omega)$ ens dona molta informació sobre els sistemes, però aquesta funció sol tenir una expressió analítica complexe. En la introducció hem començat a veure que hi havia la possibilitat de fer un estudi gràfic. Bode va estudiar amb detall com es podia representar gràficament aquesta funció, i se li va acabar dient el seu nom.

Anem a veure doncs com és l'anomenat diagrama assimptòtic de Bode. Veurem que treballa amb escala logarítmica.

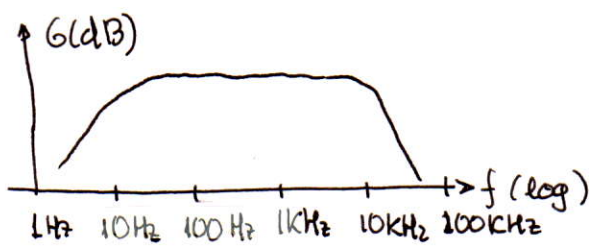
### 5.2.1. EIX DE FREQÜÈNCIES EN ESCALA LOGARÍTMICA

Ja vam veure que el guany el mesuràvem en escala logarítmica. Ara veurem que també ens convindrà utilitzar una escala logarítmica per l'eix de freqüències. Ja hem vist en l'apartat anterior que algunes gràfiques variaven molt d'amplitud en un marge petit de freqüències. Suposem, per exemple, que comprem un amplificador (per escoltar música) i ens diuen que té la següent corba de guany:




De fet ens interessa la banda de 0 a 3'4KHz, que és la banda de veu, però està tan comprimida que no podem veure res.

Si utilitzéssim una escala de freqüències logarítmica, podríem veure:




Aquí podem veure molt bé la banda de freqüències que ens interessa.

Anem a veure com, buscant el logaritme, podem trobar l'eix de freqüències:

$f = 1Hz \rightarrow \log 1 = 0$ $\qquad$ $f = 100Hz \rightarrow \log 100 = 2$

$f = 10Hz \rightarrow \log 10 = 1$ $\qquad$ $f = 1KHz \rightarrow \log 10^3 = 3$

Amb aquesta escala haurem d'anar amb compte a l'hora de dibuixar altres valors intermitjos:

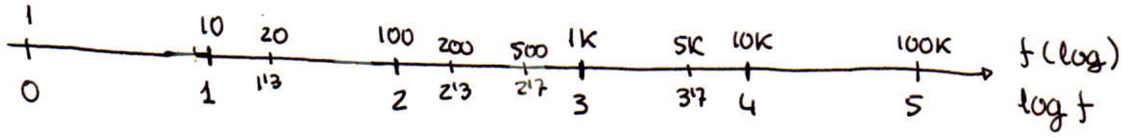
$$f = 20Hz \rightarrow \log 20 = \log(2\cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0'3 + 1 = 1'3$$

$$f = 200Hz \rightarrow \log 200 = \log(2\cdot 100) = \log 2 + \log 100 = 0'3 + 2 = 2'3$$

$$f = 500Hz \rightarrow \log 500 = \log(5\cdot 100) = \log 5 + \log 100 = 0'7 + 2 = 2'7$$

$$f = 5KHz \rightarrow \log 5000 = \log(5\cdot 10^3) = \log 5 + \log 10^3 = 0'7 + 3 = 3'7$$

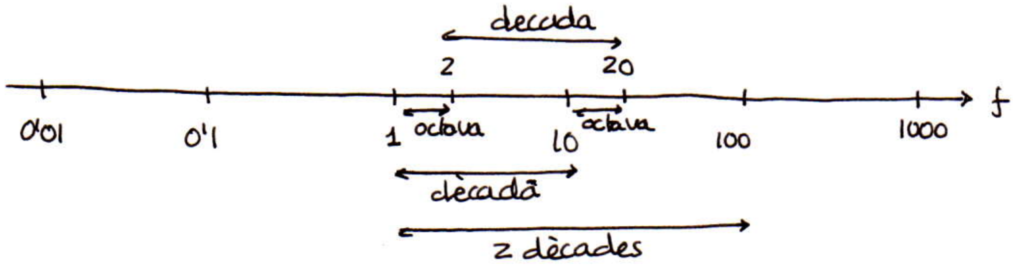
Havent vist aquests valors, podríem dibuixar l'eix de freqüències de la següent manera:



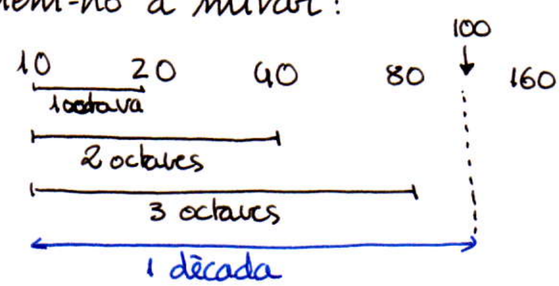

Veiem algunes definicions que ens indiquen la diferència entre freqüències:

- → Dècada: Diem que entre $f_1$ i $f_2$ hi ha una diferència d'una dècada si $f_2 = 10 f_1$ (una freqüència és 10 vegades més gran que l'altra).
- → Octava: Diem que entre $f_1$ i $f_2$ hi ha una diferència d'una octava si $f_2 = 2 f_1$ (una freqüència és el doble de l'altra).

Vegem-ho gràficament. Dibuixem l'eix, tenint en compte que podem posar la referència d'inici on vulguem (o no posar-la), perquè el 0 estarà molt lluny.




Ens pot interessar saber quantes octaves hi ha en una dècada. Anem-ho a mirar:




Podríem dir (si no comptem els zeros):

$2^1$ } → octava
$2^2$
$2^3$ } → octava } dècada
$2^x = 10$

↳ busquem $x$. Serà més de 3.

$\log 2^x = \log 10 \Rightarrow x \cdot \log 2 = 1 \Rightarrow \underline{x = 3'32}$

Per tant, dins una dècada hi caben 3'32 octaves.

## 5.2.2. DIAGRAMA ASSIMPTÒTIC DE BODE: MÒDUL

Intentem ara de representar gràficament el mòdul de $H(j\omega)$ en dB i amb l'escala de freqüències logarítmica.

Partim d'una expressió genèrica de la funció de xarxa:

$$H(s) = H_0 \frac{\Pi (s - z_i)}{\Pi (s - p_k)}$$

per cada zero i pol fem: $s - z_i = -z_i \left(\frac{s}{-z_i} + 1\right)$

$$H(s) = H_0' \frac{\Pi \left(\frac{s}{-z_i} + 1\right)}{\Pi \left(\frac{s}{-p_k} + 1\right)}$$

$H_0'$ inclou tots els termes que hem tret factor comú.

De moment ho fem tot per pols i zeros reals.

Calculem ara el mòdul de la funció de xarxa quan $s = jw$:

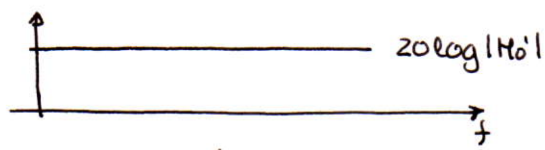
$$|H(jw)| = |H_0'| \cdot \frac{\prod \left| \frac{jw}{-z_i} + 1 \right|}{\prod \left| \frac{jw}{-p_k} + 1 \right|}$$

Busquem ara el guany, tenint en compte que al fer logaritmes es convertiran en sumes:

$$G(jw) = 20 \log |H(jw)| = 20 \log |H_0'| + \sum 20 \log \left| \frac{jw}{-z_i} + 1 \right| - \sum 20 \log \left| \frac{jw}{-p_k} + 1 \right|$$

Per dibuixar la gràfica, haurem d'estudiar cadascun dels termes del sumatori.

D'una banda tindrem el terme degut a $H_0'$:

$20 \log |H_0'| \rightarrow$ 


Els altres termes, sumaran o restaran, però tots tindran la mateixa forma i n'hi direm:

$$G_\alpha(w) = 20 \log \left| \frac{jw}{\alpha} + 1 \right|$$

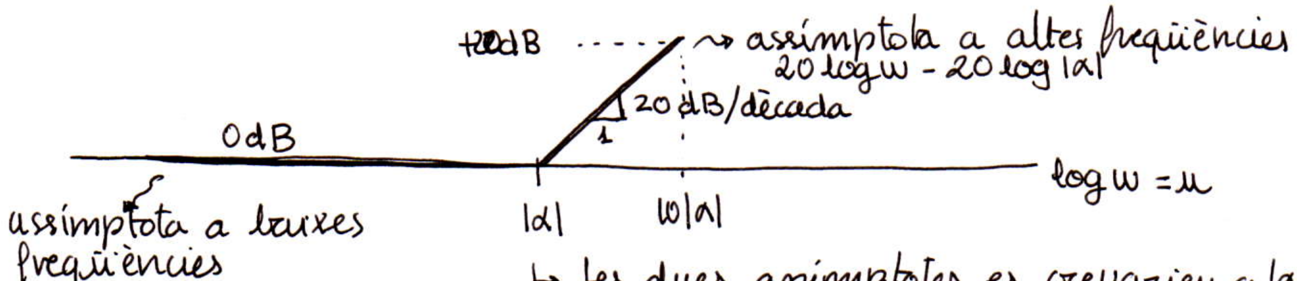
Dibuixar aquests termes resulta complicat, però no ho serà tant si ho fem assimptòticament, és a dir, per freqüències molt altes o molt baixes:

- Per baixes freqüències: $w << \alpha \Rightarrow \frac{w}{\alpha} << 1 \Rightarrow 20 \log 1 = 0\,dB$
- Per altes freqüències: $w >> \alpha \Rightarrow \frac{w}{\alpha} >> 1$

$$20 \log \left| \frac{jw}{\alpha} + 1 \right| \approx 20 \log \left| \frac{jw}{\alpha} \right| = 20 \log |jw| - 20 \log |\alpha| =$$

$$= 20 \log w - 20 \log |\alpha| \quad \text{(és una recta } 20u - a\text{)}$$

Valdrà: 0 si $w = |\alpha|$
20 si $w = 10|\alpha|$ (ens movem 1 dècada)
40 si $w = 100|\alpha|$ (ens movem 2 dècada)




↳ Les dues asímptotes es creuarien a $|\alpha|$

Recordem que les asímptotes només seran vàlides en els extrems, encara que ara hem fet que es creuessin. A la realitat haurem de veure què passa al voltant de $|\alpha|$.

Hem vist abans que semblava que el pendent de la recta era de 20 dB/dècada, ja que si partíem de $|\alpha|$, que el guany era 0, al passar a una freqüència de $10|\alpha|$ teníem:

$$G_\alpha(\omega) = 20\log 10|\alpha| - 20\log|\alpha| = 20\log 10 + 20\log|\alpha| - 20\log|\alpha| = 20\,dB$$

Per tant veiem que ens hem mogut una dècada i hem augmentat 20 dB.

Veiem-ho per qualsevol freqüència:

$$20\log \omega_1 = A$$

$$20\log(10\cdot\omega_1) = 20\log 10 + 20\log\omega_1 = 20 + A$$

També veiem que hem augmentat 20 dB respecte la freqüència anterior, que estava una dècada per sota, per tant, podem dir que el pendent és de 20 dB/dècada.

També podríem treballar amb octaves:

$$20\log \omega_1 = A$$

$$20\log(2\cdot\omega_1) = 20\log 2 + 20\log\omega_1 = 6 + A$$

Així doncs també podríem dir que el pendent és de 6 dB/octava.

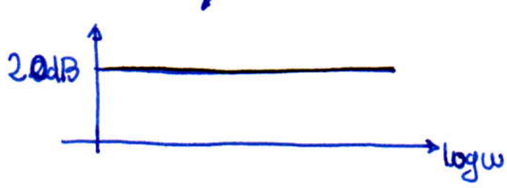
EXEMPLE:

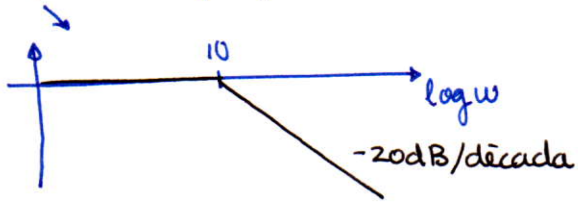
Dibuixem el diagrama de Bode per un cas simple on la funció de xarxa només té un pol.

$$H(s) = \frac{\overset{H_0}{-100}}{s+10} = \overbrace{\frac{-100}{10}}^{H_0'}\frac{1}{\left(\frac{s}{10}+1\right)} \rightarrow H(j\omega) = -10\,\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{10}+1\right)}$$

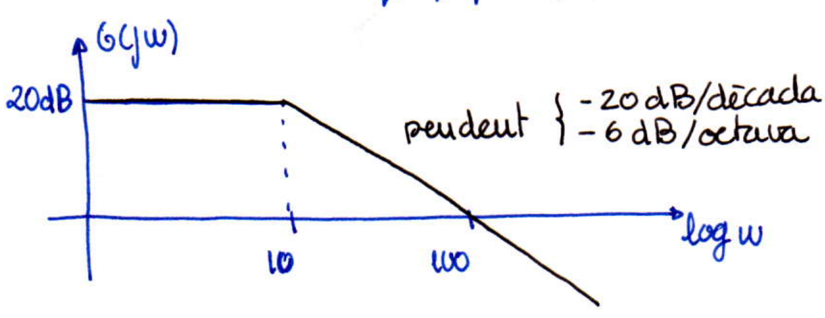
$$G(j\omega) = 20\log|H(j\omega)| = 20\log|H_0'| - 20\log\left|\frac{j\omega}{10}+1\right| =$$

$$= \underbrace{20\log|-10|}_{20dB} - \underbrace{20\log\left|\frac{j\omega}{10}+1\right|}_{\text{decreix 20dB/dècada (perquè està restant)}}$$




Si ara sumem les dues gràfiques tindrem:




Veiem doncs que a $\omega = 100$, el guany serà 0, ja que en una dècada haurà baixat 20dB.

Veiem doncs que, amb aquestes gràfiques, sense fer gaires càlculs, podem saber el guany en funció de la freqüència. Sempre serà més fàcil anar ràpidament que fer càlculs complicats amb H(s).

Ja hem dit que això era una corba assimptòtica, que serà vàlida en els extrems, però no és la corba real.

## 5.2.3. CORBA REAL: MÒDUL

Ja hem vist que el diagrama assimptòtic no era vàlid sempre. Anem a investigar què passa al voltant de $\alpha$, on la corba assimptòtica no és vàlida.

Veiem-ho primer en $\alpha$, que és el pitjor cas:

$$G_\alpha(j\omega) = 20\log\left|\frac{j\omega}{\alpha}+1\right| \quad \text{si } \omega=\alpha \Rightarrow G_\alpha(j\alpha) = 20\log\left|\frac{j\alpha}{\alpha}+1\right| =$$

$$= 20\log|j+1| = 20\log 2^{1/2} = 10\log 2 = 3\text{dB}$$

Veiem doncs que per $\omega=\alpha$, la corba real s'allunya 3dB de la corba assimptòtica (en l'assimptota val 0dB i ara 3dB el guany). Calculem què passa per una freqüència de $\omega=\alpha/2$ (una octava per sota):

$$G_\alpha\left(j\frac{\alpha}{2}\right) = 20\log\left|\frac{j\,\alpha/2}{\alpha}+1\right| = 20\log\left|j\frac{1}{2}+1\right| = 20\log\sqrt{\frac{5}{4}} \approx 1\text{dB}$$

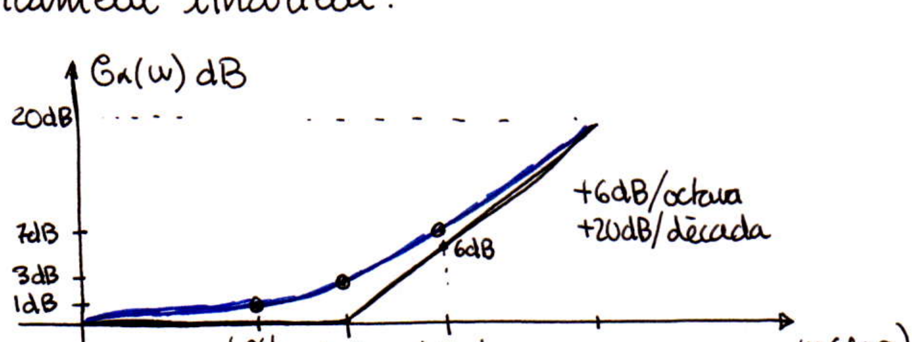
Si a l'assimptota el guany valia 0dB, vol dir que ara està 1dB per sobre. Veiem que l'error és inferior que en $\alpha$.

Fem ara els càlculs per $\omega=2\alpha$ (una octava per sobre):

$$G_\alpha(j2\alpha) = 20\log\left|\frac{j2\alpha}{\alpha}+1\right| = 20\log|j2+1| = 20\log\sqrt{5} \approx 7\text{dB}$$

En l'assimptota el guany valia 6dB, ja que estem una octava per sobre i el pendent és de 6dB/octava. Si ara és 7dB, vol dir que també hi ha un error de 1dB.

Gràficament tindríem:




Veiem doncs que en el colze, la corba real es desvia 3dB i una octava per sota o per sobre, es desvia 1dB. Si féssim els càlculs, veuríem que una dècada per sobre o per sota es desvia 0'04dB.

Així doncs veiem que l'aproximació que fem amb l'assímptota és molt bona. La podrem utilitzar sempre, tenint en compte l'error que fem en alguns punts.

En l'exemple que hem fet abans, en el colze, en lloc de tenir un guany de 20 dB, el tindríem de 17 dB (s'allunyaria 3 dB).

## 5.2.4. DIAGRAMA ASSIMPTÒTIC DE BODE: FASE

Per trobar el diagrama de fase, partim novament de l'expressió de la funció de xarxa que hem arreglat abans:

$$H(s) = H_0' \frac{\Pi\left(\frac{s}{-z_i}+1\right)}{\Pi\left(\frac{s}{-p_k}+1\right)}$$

D'aquesta expressió, busquem ara l'argument per $s = j\omega$:

$$\arg H(j\omega) = \arg H_0' + \sum \arg\left(\frac{j\omega}{-z_i}+1\right) - \sum \arg\left(\frac{j\omega}{-p_i}+1\right)$$

L'argument de $H_0'$ serà $0°$ o $180°$. Deixem-lo de moment i anem a estudiar com és un dels altres termes:

$$\theta_\alpha(\omega) = \arg\left(\frac{j\omega}{\alpha}+1\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Busquem alguns valors per poder-ho dibuixar:

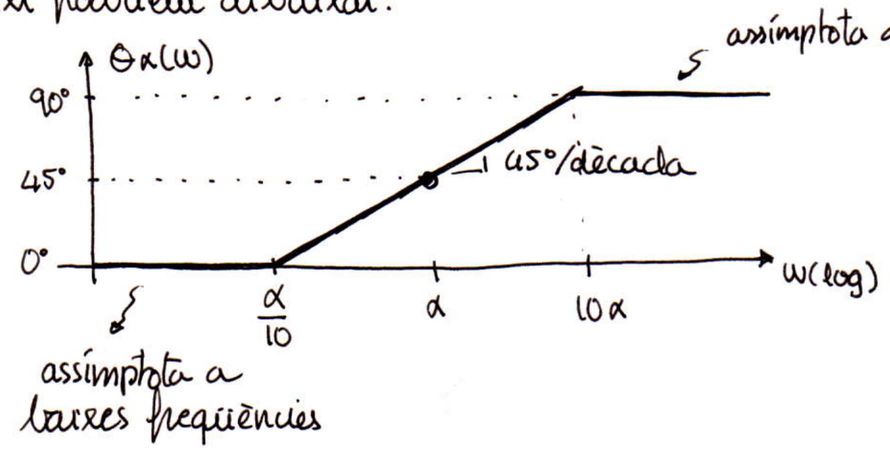
$\omega = \alpha \Rightarrow \theta_\alpha(\omega) = \operatorname{arctg} 1 = 45°$

$\omega \to 0 \ (\omega \ll \alpha) \Rightarrow \theta_\alpha(\omega) = \operatorname{arctg} 0 = 0°$

$\omega \to \infty \ (\omega \gg \alpha) \Rightarrow \theta_\alpha(\omega) = \operatorname{arctg} \infty = 90°$

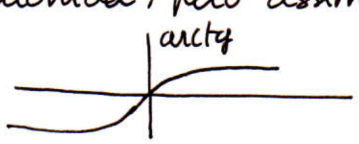
Haurem de fer aproximacions i podem suposar que una dècada per sota i per sobre de $\omega = \alpha$ (és a dir $\omega = \alpha/10$ i $\omega = 10\alpha$) ja tenim les condicions de $\omega \ll \alpha$ i $\omega \gg \alpha$. (a aquestes freqüències hi ha uns 5° de diferència amb l'assímptota).

Així podríem dibuixar:




Continuem utilitzant l'escala de freqüències logarítmica.

Podem suposar que al voltant de $\alpha$, creixerà com una recta de pendent 45°. No és evident veure això, la funció arctg és més arrodonida, però assimptòticament ho podem veure així.



## 5.2.5 CORBA REAL : FASE

Es poden calcular alguns punts amb l'octave o amb la calculadora per veure com es desvia la corba real respecte l'assimptòtica.

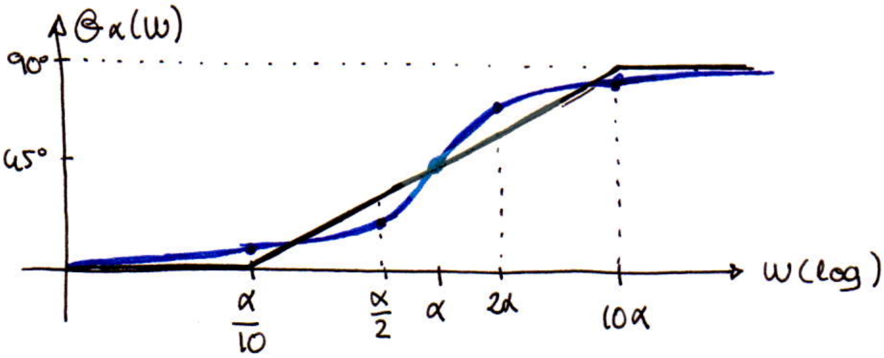
$$\omega = \frac{\alpha}{10} \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha/10}{\alpha}\right) = \operatorname{arctg}(0'1) = 5'7^\circ \ (0^\circ) \text{ una dècada per sota}$$

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha/2}{\alpha}\right) = \operatorname{arctg}(0'5) = 26'5^\circ \ (31'5^\circ) \text{ una octava per sota}$$

$$\omega = 2\alpha \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{2\alpha}{\alpha}\right) = \operatorname{arctg}(2) = 63'4^\circ \ (58'5) \text{ una octava per sobre}$$

$$\omega = 10\alpha \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{10\alpha}{\alpha}\right) = \operatorname{arctg}(10) = 84'3^\circ \ (90^\circ) \text{ una dècada per sobre}$$

Gràficament tindríem:




Veiem doncs que la recta és una bona aproximació, que podem fer servir, i sempre sabrem l'error que fem.

## 5.2.6. ESTUDI DELS TERMES $s^k$

Fins ara hem tractat funcions de xarxa que tenien tan sols termes com $(s \pm z_i)$ o $(s \pm p_k)$, com per exemple:

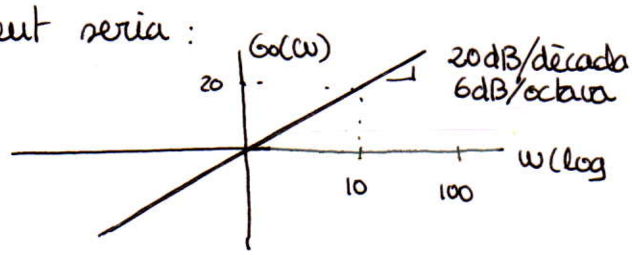
$$\frac{s+2}{s+3} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{H_0'} \frac{\frac{s}{2}+1}{\frac{s}{3}+1} \quad \xrightarrow{\text{En general:}} \quad H(s) = H_0 \frac{\Pi(s-z_i)}{\Pi(s-p_k)} = H_0' \frac{\Pi\left(\frac{s}{-z_i}+1\right)}{\Pi\left(\frac{s}{-p_k}+1\right)}$$

Anem a veure ara què passaria si tenim termes amb s sola (s−0) o elevats a algun nombre $s^k$ $(s, s^2, s^3, \dots)$. Aquests termes poden estar al numerador o al denominador.

La resta de termes seran iguals que abans. Anem a estudiar primer un terme en s al numerador (K=1):

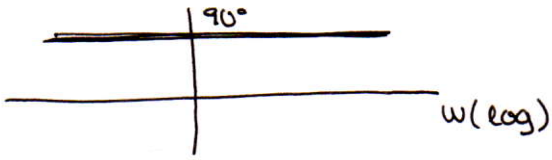
$$G_0(\omega) = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega$$

Gràficament seria:



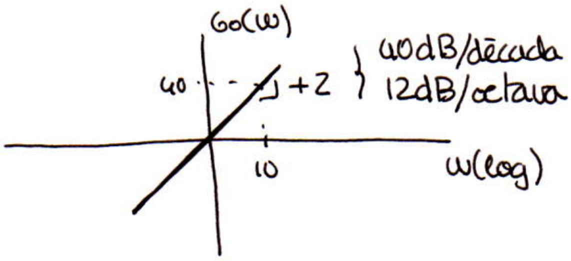

Veiem que aquest és el mínim pendent que ens surt sempre i li podem dir +1 (és un criteri per simplificar).

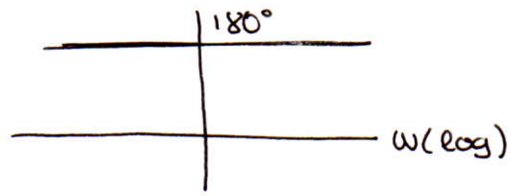
L'argument seria: $\arg(j\omega) = 90°$. Així doncs, gràficament seria:




Anem a veure què passaria ara si tinguéssim un terme en $s^2$ $(k=2)$

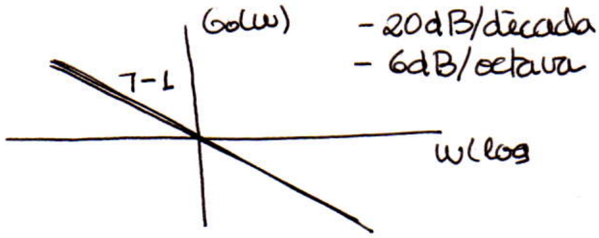
$$G_0(\omega) = 20\log|j\omega|^2 = 40\log\omega$$
$$\text{Fase} = \arg(j\omega)^2 = \arg(-\omega^2) = 180°$$

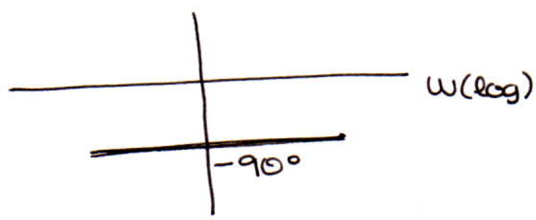



Veiem doncs que la fase és ara 180° i el guany degut a aquest factor seria una recta de pendent +2, és a dir 40dB/dècada.

Si la s estigués al denominador (tinguéssim un pol a zero), seria el mateix, però tindríem un signe negatiu (estaria restant).




Fent-ho igual, si tinguéssim un terme $s^2$ al denominador, tindríem un guany que seria una recta de pendent -2 (40 dB/dècada o -12dB/octava). i una fase de -180°.

EXEMPLE:

Suposem que tenim la següent funció de xarxa i que volem dibuixar els diagrames de Bode de mòdul i fase.

$$H(s) = 10^6 \frac{s\cdot(s+10)}{(s+20)(s+200)(s+1000)}$$

Transformem ara la funció de xarxa de la manera que hem vist fins ara.

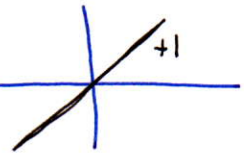
$$H(s) = 10^6 \frac{10}{20\cdot 200\cdot 1000} \cdot \frac{s\cdot\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{200}+1\right)\left(\frac{s}{1000}+1\right)}$$

$$H(s) = 2'5 \cdot \frac{s\cdot\left(\frac{s}{10}+1\right)}{\left(\frac{s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{200}+1\right)\left(\frac{s}{1000}+1\right)}$$

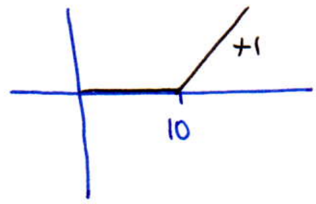
Començem pel diagrama de mòdul. Busquem primer el diagrama de cada terme, i després ja els ajuntarem tots.

Fem els zeros, que tenen pendent positiu: quan indiquem pendent ±1, voldrà dir ±20 dB/dècada o bé ±6 dB/octava.

$s \rightarrow$

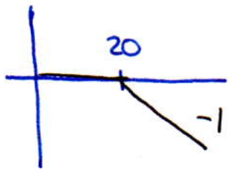



$\frac{s}{10}+1 \rightarrow$

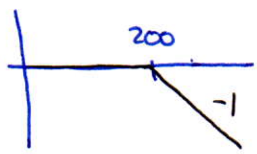



Fem ara el mateix pels 3 pols de la funció de xarxa:

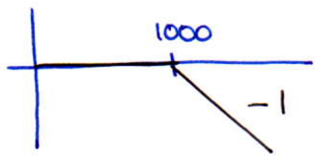
$\frac{s}{20}+1 \rightarrow$




$\frac{s}{200}+1 \rightarrow$



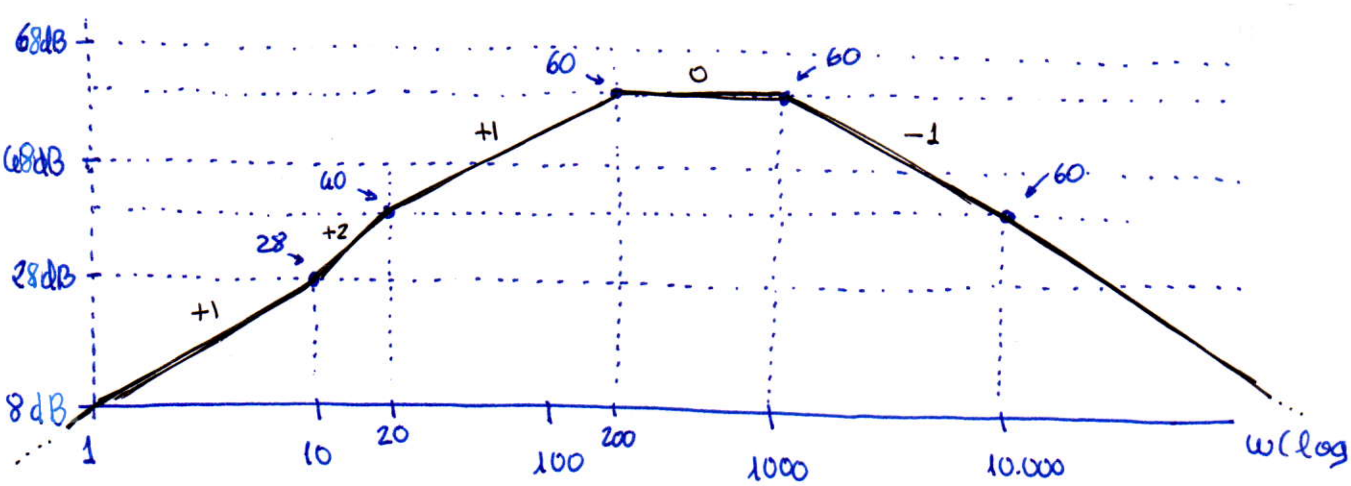

$\frac{s}{1000}+1 \rightarrow$




Ara ens falta veure com és Ho', que en aquest cas val 2'5:

$$20 \log |H_0'| = 20 \log 2'5 = 20 \log \frac{10}{2 \cdot 2} = 20 \log 10 - 20 \log 2 - 20 \log 2 =$$
$$= 20 - 6 - 6 = 8 \text{dB}$$


Ara hauríem de dibuixar el diagrama de Bode sencer. Per fer-ho, marquem primer els punts on estan els colzes. En cadascun d'aquests punts, haurem de sumar o restar un pendent (o uns dB) fins el colze següent.




Hem començat amb 8 dB perquè és el valor constant degut a la Ho'. A partir d'aquí, a cada colze hi hem anat sumant o restant un pendent +1.

Veiem que el circuit acaba amplificant 60 dB (això vol dir que multiplica la tensió per 1000 en determinades freqüències.

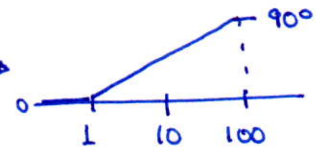
Veiem que, observant el gràfic, podem veure on s'ha d'incidir per modificar alguns dels punts. Per exemple, si volguéssim tenir un colze a 2000 enlloc de tenir-lo a 1000, hauríem de mirar, en la funció de xarxa, quins components del circuit fan que valgui 1000, i canviar R's, L's o C's per tal que aconseguim que valgui 2000.

Una manera senzilla de dissenyar seria mirar on volem els pols i zeros. Si amb un circuit senzill, per exemple un RC, en sabem trobar un, doncs posaríem RC's diferents seguits, amb seguidors de tensió entremig per aïllar.

Veiem doncs que el diagrama de Bode ens dóna molta informació, per això és interessant de treballar amb ell.

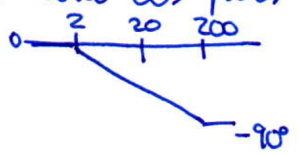
Anem ara a veure la gràfica de fase per aquest exemple:
comencem per la constant i els zeros:

$H_0' = 2'5 \rightarrow 0°$ $\qquad s \rightarrow 90°$ $\qquad \frac{s}{10}+1 \rightarrow$

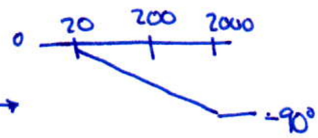



Observem ara els pols:

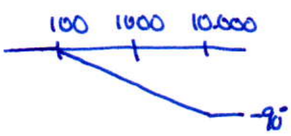
$\frac{s}{20}+1 \rightarrow$




$\frac{s}{200}+1 \rightarrow$

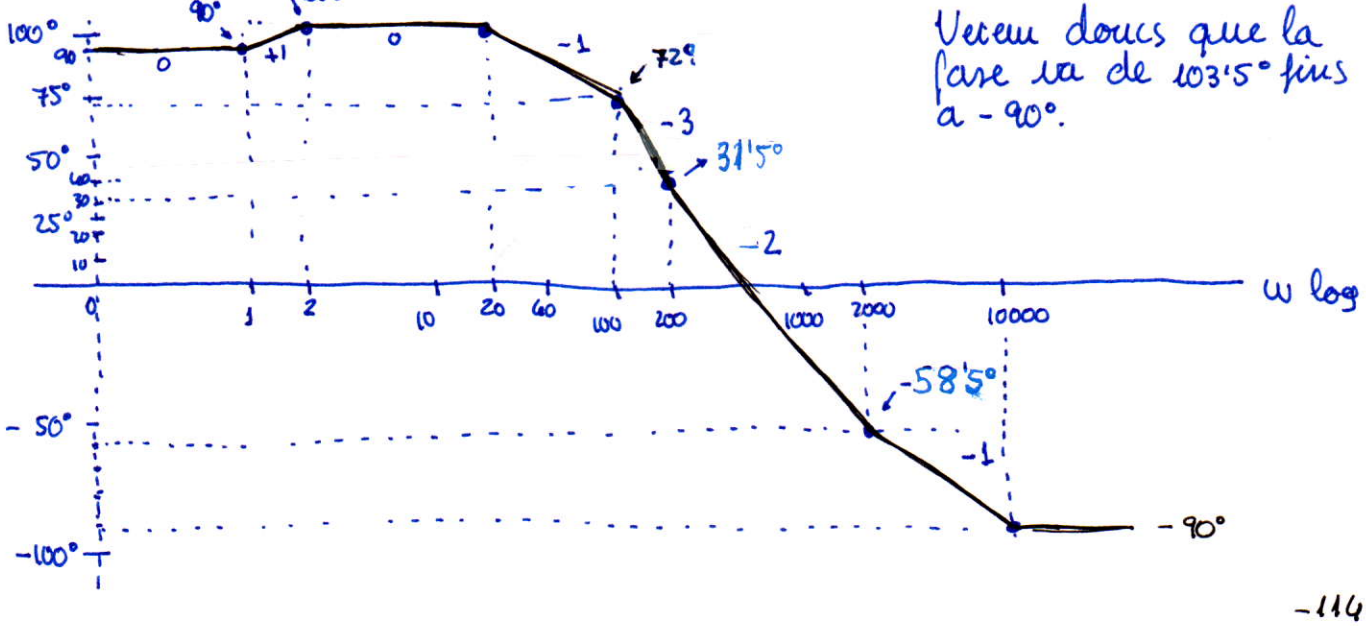



$\frac{s}{1000}+1 \rightarrow$




Ara podem dibuixar la gràfica global, tenint en compte que:

- 45°/dècada són 13'5°/octava (45°/decada / 3'32 octaves/decada)
- De 1 a 2 hi ha una octava ⇒ pujà 13'5°
- De 2 a 20 hi ha una dècada ⇒ baixa 45°/dècada ⇒ queda ct.
- De 20 a 100 hi ha $20 \cdot 2^x = 100$ ⇒ 2'33 octaves ⇒ baixa 45°/dècada, 31'45°
- De 100 a 200 hi ha una octava ⇒ baixa a 3×45°/dècada ⇒ 40'5°
- De 200 a 2000 hi ha una dècada ⇒ baixa a 2×45°/dècada ⇒ 90°
- De 2000 a 10.000 hi ha 2'33 octaves ⇒ baixa a 13'5°/octava ⇒ 31'45°
- Comencem a 90°



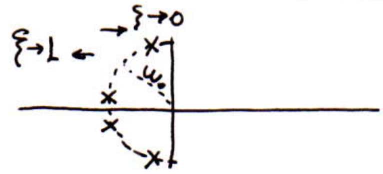

Veiem doncs que la fase va de 103'5° fins a -90°.

## 5.2.7. TERME PAS BAIX DE 2n ORDRE

Fins ara havíem vist com fer tot això si teníem arrels reals. Ara veurem com ho hem de fer si tenim pols complexes conjugats. En aquest cas, tal com havíem vist, el denominador el podem escriure de la següent manera:

$$s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$$

Estudiant aquesta forma, vam veure que les arrels estan en un cercle de radi $\omega_0$ i $\xi$ ens diu si estan o no prop de l'eix imaginari.




En concret, per $\xi = 0$ tindríem pols imaginaris purs, i per $\xi = 1$ pol real doble.

En concret estudiarem la següent funció de xarxa:

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Quan busquem $H(j\omega)$, ens adonem que per $\omega \to 0$, no amplifica ni atenua.

Calculem com seria el guany:

$$G(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| = 10 \log |H(j\omega)|^2$$ → Ho posem així, perquè és millor mirar el mòdul al quadrat, ens estalviem l'arrel.

Busquem doncs el modul al quadrat de $H(j\omega)$:

$$|H(j\omega)|^2 = \left| \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2\cdot\xi\cdot\omega_0\cdot j\omega + \omega_0^2} \right|^2 = \left| \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega} \right|$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}$$

Mirem com es comporta per freqüències molt baixes i molt altes:

Per $\omega \to 0$ $(\omega \ll \omega_0)$ → $|H(j\omega)|^2 = \dfrac{\omega_0^4}{\omega_0^4 + \underbrace{4\xi^2\omega_0^2\omega^2}_{\text{despreciable}}} = \dfrac{\omega_0^4}{\omega_0^4} = 1$

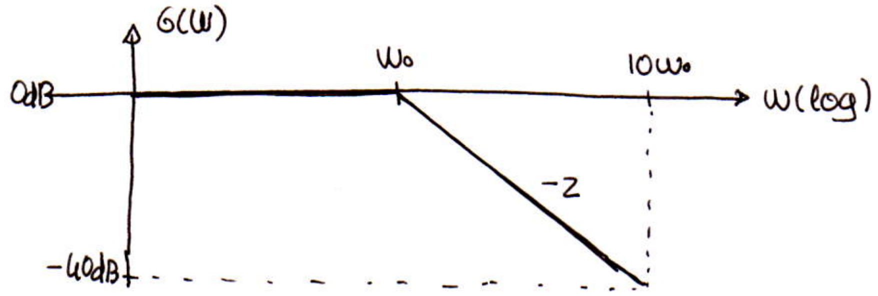
$$G(\omega) = 10 \log |H(j\omega)|^2 = 10 \log 1 = 0\,dB$$

Per $\omega \to \infty$ $(\omega \gg \omega_0)$ → $|H(j\omega)|^2 = \dfrac{\omega_0^4}{\omega^4 + \underbrace{4\xi^2\omega_0^2\omega^2}_{\text{despreciable}}} = \dfrac{\omega_0^4}{\omega^4}$

$$G(\omega) = 10 \log |H(j\omega)|^2 = 10 \log \frac{\omega_0^4}{\omega^4} = \underbrace{40 \log \omega_0}_{ct.} - \underbrace{40 \log \omega}_{\text{pendent } -2 \ (-40\,dB/octava)}$$

Les dues assimptotes es creuaran a $\omega_0$.

Veiem gràficament com serà:




Recordem que 20 log ω era una recta de pendent 20 dB/dècada i m'hi deiem -1. Ara tindrem pendent -2.

Observem que el guany depèn de $\omega_0$ (radi de la circumferència que conté els pols), però no de $\xi$ (indica si els pols estan aprop o no de l'eix).

Ara falta veure per on passa la corba real. Per saber-ho busquem el seu valor per $\omega = \omega_0$:

$$|H(j\omega_0)|^2 = \frac{\omega_0^4}{\underbrace{(\omega_0^2-\omega_0^2)^2}_{0}+4\xi^2\omega_0^4} = \frac{1}{4\xi^2}$$

Així el guany serà:

$G(\omega) = 10 \log \frac{1}{4\xi^2}$ → Veiem que ara sí que depèn de $\xi$ i no de $\omega_0$.

Mirem què passaria per alguns valors de $\xi$:

Per $\xi = \frac{1}{2} \Rightarrow G(\omega) = 10 \log \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 10 \log 1 = 0\,dB$ (passa però però els punts del voltant no són 0).

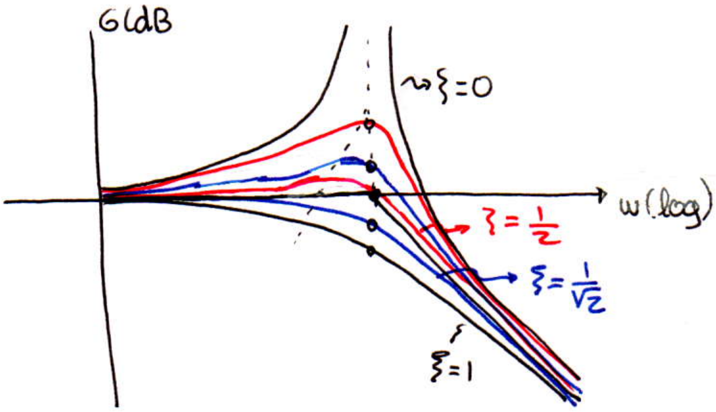
Per $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G(\omega) = 10 \log \frac{1}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 10 \log \frac{1}{2} = -3\,dB$

Per $\xi = 1 \Rightarrow G(\omega) = 10 \log \frac{1}{4\cdot 1^2} = 10 \log \frac{1}{4} = -6\,dB$

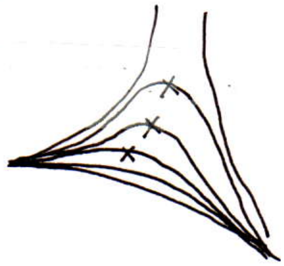
↳ per aquest cas, podríem haver vist que té dos pols reals iguals, de manera que ja es podia veure que tindria pendent -2 i es separaria -6dB.

Per $\xi = 0 \Rightarrow G(\omega) = 10 \log \frac{1}{0} = \infty$

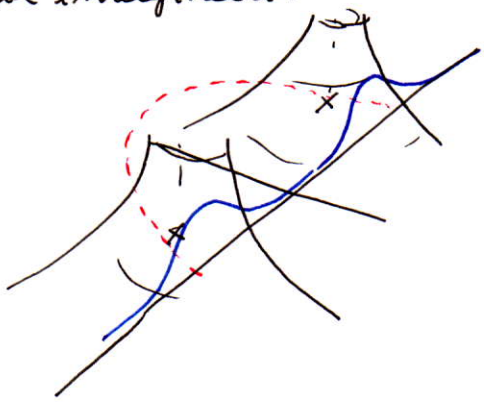
Amb això, arribaríem a la conclusió que la gràfica és:




Aquestes corbes tenen un màxim, i no sempre està a $\omega_0$

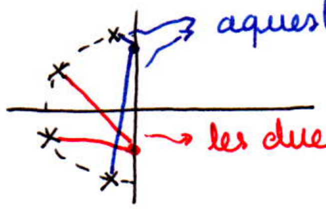


Intentem veure perquè la gràfica és així.
Recordem que H(s) era una funció en 3D, que, on hi havia els pols, pujava cap a l'infinit, i en els zeros estava sobre el pla. H(jω) és un tall vertical d'aquesta funció, que talla just per l'eix imaginari.



Sembla clar que per $\xi=0$, que els pols estan sobre l'eix imaginari, el guany sigui $\infty$.
Com més a prop estiguin els pols de l'eix imaginari, més gran serà el guany.
Els pols es mouen sobre un semicercle de radi $\omega_0$. Quan $\xi$ s'acosta a 1, s'allunyen de l'eix imaginari, i es normal de el guany baixi.

També podríem veure això mirant-ho sobre el pla, ja que en el fons, $(s-p_1)\cdot(s-p_2)$, que és el què tenim al denominador, es pot mirar com 2 vectors, i acabem mirant dues distàncies d'un punt concret $j\omega$, als dos pols. Si un dels dos vectors és molt petit, el denominador es farà petit, i per tant la funció es farà gran. Veiem-ho gràficament:




Veiem doncs que per $\xi<0'5$, anem trobant corbes de guany que cada vegada tenen un màxim més gran. Aquest es donarà pel mínim del denominador. Cal que busquem aquesta informació, ja que veiem que per algunes $\xi$ no s'assembla a la corba asimptòtica, i caldrà que sapiguem com varia.
Recordem el mòdul al quadrat de la funció de xarxa:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_0^2\omega^2}$$

→ el denominador ha de ser mínim per màxim de $H(j\omega)$. Derivem el denominador i l'igualem a 0 (derivem respecte $\omega$).

$$2(\omega_0^2-\omega^2)\cdot(-2\omega) + 4\xi^2\omega_0^2\cdot 2\omega = 0$$

$\omega=0$ és una possible solució, però no ens interessa, busquem una que sigui propera a $\omega_0$ i depengui de $\xi$.

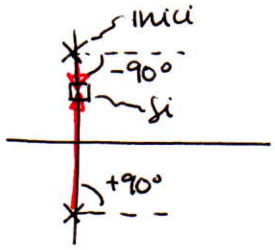
Una altra solució seria:

$$(\omega_0^2-\omega^2) = 2\xi^2\omega_0^2 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2(1-2\xi^2) \Rightarrow \omega = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$$

Observem que aquesta solució només existirà si $\xi^2 < 0'5$, és a dir, per $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, tal com ja veiem a la gràfica.
Ara sabem on està el màxim, i podríem calcular el guany per aquesta $\omega$ si ens interessés.

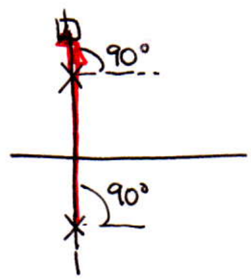
Ara haurem de veure què fan les corbes de fase. Ho podem fer analíticament, o gràficament, amb vectors sobre el diagrama de pols i zeros.

Mirem les asimptotes de les dues maneres:




El numerador de $H(j\omega)$ és ct. per tant l'argument és 0°.
En el denominador tenim $90° - 90° = 0° \Rightarrow$ fase $= 0°$
Això passarà si tenim $\omega < \omega_0$, ja que els pols són:
$\xi = 0$ (pols a l'eix i a $\omega_0$)
Analíticament:

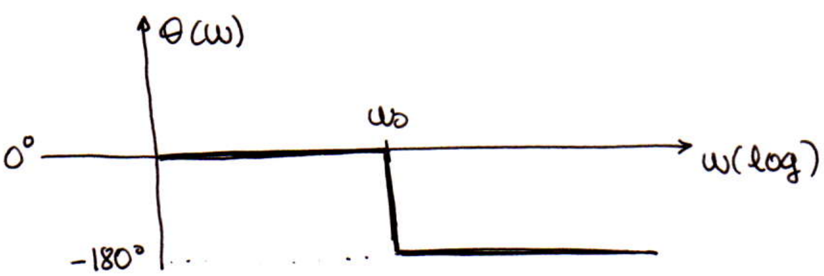
$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \text{Si } \omega \to 0 \quad H(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} = 1 \Rightarrow \text{fase } 0°$$




El numerador és constant, i l'argument és 0°
Al denominador tenim $90° + 90° = 180°$. Com que està al denominador la fase serà $-180°$
Això passarà per $\omega > \omega_0$. Continuem amb $\xi = 0$ (pols a l'eix i de valor $\omega_0$).
Analíticament:

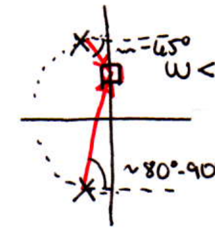
$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \text{Si } \omega \to \infty \quad H(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{-\omega^2} \Rightarrow \text{fase } -180°$$

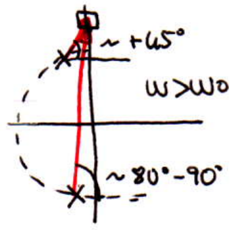
Veiem que en el moment que la freqüència passa de $< \omega_0$ a $> \omega_0$, el canvi de fase és instantani. Així, per $\xi = 0$, la corba de fase serà:




Les asimptotes seran les mateixes per qualsevol $\xi$, però la corba real s'arrodonirà. Verem-ho gràficament sobre el diagrama de pols i zeros. (analíticament costaria més).

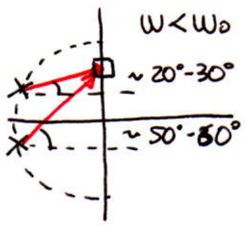
• $\xi$ petita

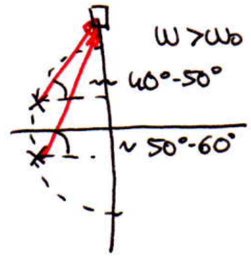



Veiem que el canvi no és brusc com abans, però quan passem d'estar per sota $\omega_0$ a estar per sobre, un pol no varia gaire la fase, però l'altre varia molt, per tant el canvi global de la fase serà gran i s'acostarà força a l'assímptota.

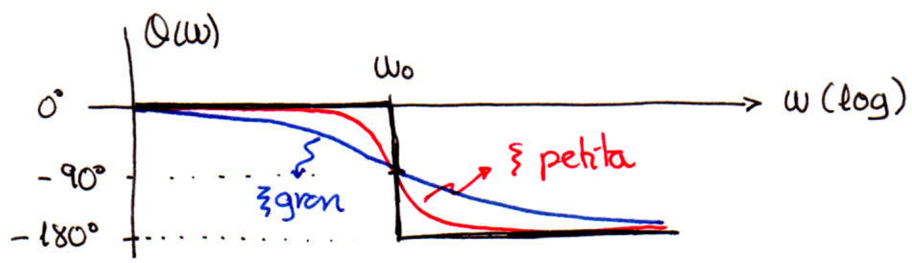
• $\xi$ gran




Veiem ara que els angles varien molt poc si estem per sota o per sobre de $\omega_0$, per tant, en aquest cas, la corba seria molt més suau.

Comparem aquestes corbes amb la corba assímptota:




Observem que per $\omega = \omega_0$ passa sempre per $-90°$:

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \longrightarrow H(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega}$$

$$\text{Si } \omega = \omega_0 \rightarrow H(j\omega_0) = \frac{\omega_0^2}{j2\cdot\xi\omega_0^2} = \frac{1}{j2\xi}$$

El denominador té argument $90°$ i la funció $-90°$ per qualsevol $\xi$.

## 5.2.8. TERME PAS BANDA DE SEGON ORDRE

Considerem ara una funció de xarxa que tingui la següent forma:

$$H(s) = H_{max} \frac{2\xi\omega_0 s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad H_{max} > 0$$

recordem que després a s hi posarem $j\omega$.

Observem que tindrà els mateixos pols que la funció que hem treballat abans, però ara tenim un zero a l'origen.

Estudiem què passa a freqüències altes i baixes:

Freqüències baixes $(s \to 0) \Rightarrow H(s) \approx \frac{0}{\omega_0^2} = 0$

Freqüències altes ($s\to\infty$) $\Rightarrow$ $H(s) \simeq \frac{2\xi\omega_0 s}{s^2} = \frac{2\xi\omega_0}{s} = 0$

Veiem doncs que no deixa passar ni les altes freqüències ni les baixes. Suposem doncs que deixarà passar les mitjanes i serà un filtre pas banda. Anem-ho a estudiar amb més detall. Calculem primer el mòdul de la funció de xarxa al quadrat, igual que hem fet pel filtre pas baix.

$$|H(j\omega)|^2 = \left| H_{max} \frac{j2\xi\omega_0\omega}{-\omega^2 + j2\xi\omega_0\omega + \omega_0^2} \right|^2 = H_{max}^2 \frac{4\xi^2\omega_0^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}$$

Busquem ara les assímptotes del guany amb més detall:

$$\omega \to 0 \Rightarrow G(\omega) = 10\log\left(H_{max}^2 \frac{4\xi^2\omega_0^2\omega^2}{\omega_0^4}\right) = 20\log\left(H_{max}\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2}\right) =$$

$$= \underbrace{20\log\frac{H_{max}\cdot 2\xi}{\omega_0}}_{ct.} + 20\underbrace{\log\omega}_{u} \rightarrow a + 20u \text{ recta de pendent } +1$$

(20dB/dècada).

$$\omega \to \infty \Rightarrow G(\omega) = 10\log\left(H_{max}^2 \frac{4\xi^2\omega_0^2\omega^2}{\omega^4}\right) = 20\log\left(H_{max}\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega^2}\right) =$$

$$= \underbrace{20\log H_{max} 2\xi\omega_0}_{ct.} - 20\underbrace{\log\omega}_{u} \rightarrow a - 20u \text{ recta de pendent } -1$$

(-20dB/dècada).

Ara caldria mirar per quina $\omega$ es tallen les dues assímptotes i quan val en aquest punt.

Igualem primer les dues rectes i busquem $\omega$:

$$20\log\frac{H_{max}\cdot 2\xi}{\omega_0} + 20\log\omega = 20\log H_{max}2\xi\omega_0 - 20\log\omega$$

$$\cancel{20\log H_{max}\cdot 2\xi} - 20\log\omega_0 + 20\log\omega = \cancel{20\log H_{max}\cdot 2\xi} + 20\log\omega_0 - 20\log\omega$$

$$40\log\omega = 40\log\omega_0 \Rightarrow \text{Es tallen a } \omega = \omega_0$$

Ara busquem quan val la funció en aquest punt. Agafem qualsevol de les dues rectes:

$$G(\omega) = 20\log H_{max}\cdot 2\cdot\xi - 20\log\omega_0 + 20\log\omega$$

$$G(\omega_0) = 20\log H_{max} + 20\log 2\xi - \cancel{20\log}\,\omega_0 + \cancel{20\log}\,\omega_0$$

$$G(\omega_0) = 20\log H_{max} + 20\log 2\xi$$

Busquem ara quan valdrà la corba real en aquest punt ($\omega=\omega_0$).

$$|H(j\omega)|^2 = H_{max}^2 \, \frac{4\xi^2\omega_0^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_0^2\omega^2}$$

Per $\omega=\omega_0 \Rightarrow |H(j\omega_0)|^2 = H_{max}^2 \, \frac{4\xi^2\omega_0^4}{4\xi^2\omega_0^4} = H_{max}^2$

Aleshores el guany seria:

$$G(\omega_0) = 10 \log |H(j\omega_0)|^2 = 10 \log H_{max}^2 = 20 \log H_{max}.$$

Així doncs veiem que entre la corba real i l'assímptota hi ha una diferència de $20 \log 2\xi$. Veiem que, igual que passava amb el pas baix, aquesta diferència depèn de $\xi$.

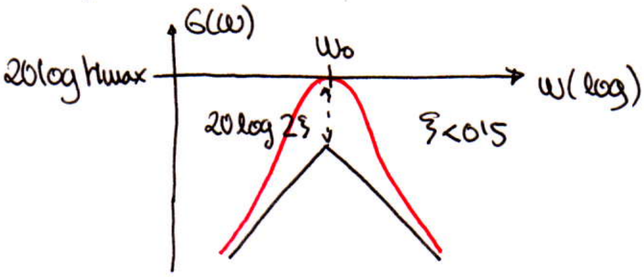
Dibuixem-ho per alguns valors de $\xi$:

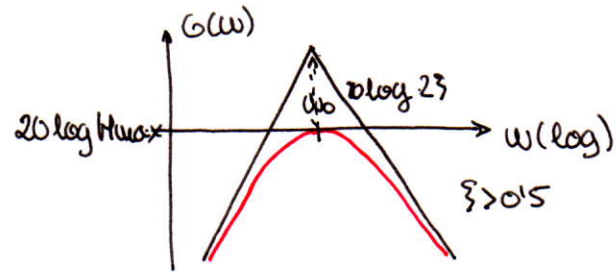
Si $\xi = 0'5 \rightarrow 20 \log 2\xi = 20 \log 1 = 0\,dB$
En el màxim, corba real i assímptota passen pel mateix punt, però la real és més arrodonida.

Si $\xi < 0'5 \rightarrow 20 \log 2\xi$ és negatiu, perquè $2\xi < 1$.
La corba real passaria per sobre de l'assímptota. Com més petita sigui $\xi$, més separades estaran.

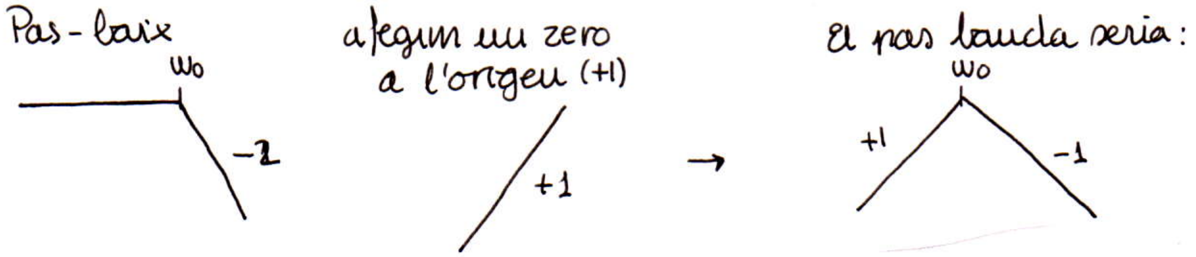
Si $\xi > 0'5 \rightarrow 20 \log 2\xi$ és positiu, perquè $2\xi > 1$
La corba real passarà per sota de l'assímptota. Com més gran sigui $\xi$, més separades estaran.
Com a màxim $\xi = 1 \Rightarrow 20 \log 2 = 6\,dB$.

El màxim de la corba real sempre dependrà de $H_{max}$. Si aquesta valgués 1, seria $0\,dB$.




Podríem haver vist directament que l'assímptota tenia aquesta forma recordant que pel pas baix era 0 i −2 i ara sumem un zero a l'origen amb pendent +1:



Per tenir més informació, treballem una mica més l'expressió de $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = H_{max} \frac{j2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega}$$ dividim a dalt i a baix per $j2\xi\omega_0\omega$

$$H(j\omega) = H_{max} \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2-\omega^2}{j2\xi\omega_0\omega}} = H_{max} \frac{1}{1 + j\frac{1}{2\xi}\cdot\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega\omega_0}}$$

$\frac{1}{j}$ és $-j$ i canviem el signe posant $\omega^2-\omega_0^2$ en lloc de $\omega_0^2-\omega^2$.

$$H(j\omega) = H_{max} \frac{1}{1 + j\frac{1}{2\xi}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$ convé recordar aquesta expressió o saber com s'hi arriba.

Veiem que hi ha una simetria al voltant de $\omega_0$, cosa que ja es veia gràficament. Podrem saber com es comporta estudiant la part complexa del denominador, per exemple mirant què passa a una distància per sobre i per sota de $\omega_0$.

$$\omega = \alpha\omega_0 \Rightarrow H(j\alpha\omega_0) = H_{max}\frac{1}{1 + j\frac{1}{2\xi}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\alpha} \Rightarrow H\left(j\frac{\omega_0}{\alpha}\right) = H_{max}\frac{}{1 + j\frac{1}{2\xi}\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)}$$

Amb aquestes expressions podríem saber què passa una octava o una dècada per sobre o per sota de $\omega_0$.

Observem que aquestes dues expressions són conjugades:

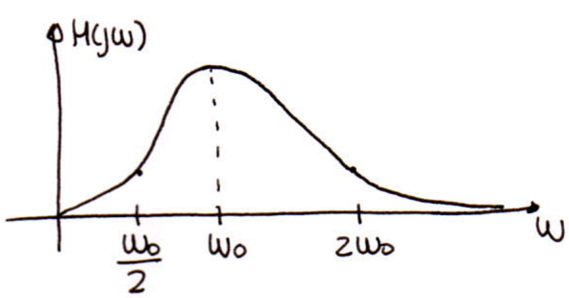
$$1 + j\frac{1}{2\xi}\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) = 1 - j\frac{1}{2\xi}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$$

això vol dir que tindran el mateix mòdul i la fase serà igual però canviada de signe.

L'amplificació serà, doncs, la mateixa una octava (o dècada) per sobre que una octava (o dècada per sota). En escala logarítmica seria totalment simètric, no en canvi en escala normal.

Podem dir que és un filtre pas banda de 2on ordre simètric respecte $\omega_0$, que només deixa passar freqüències al voltant de $\omega_0$. (Seria el mateix que un filtre de llum verda, que només deixa passar les freqüències de llum verda).

Si no utilitzéssim escala logarítmica tindríem:




Passa el mateix a 0 que a ∞.

El què passa entre $\omega_0/2$ i $\omega_0$ es veuria molt millor si utilitzem una escala logarítmica

En escala logarítmica ho veuríem simètric, tal com ho hem dibuixat abans.

Ara, que coneixem el centre de la banda de pas, i tenim més detall de la funció de xarxa, ens interessarà saber l'ample de banda, és a dir, freqüències per les quals el guany ha baixat 3dB. En direm l'ample de banda a -3dB.

Haurem, doncs, de buscar les freqüències que fan que: $|H(j\omega)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ (Recordem que baixar el guany 3dB, volia dir baixar la potència a la meitat, o dividir l'amplitud per $\sqrt{2}$).

$$H_{max} \frac{1}{\left| 1 + j\frac{1}{2\xi}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right|} = H_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Podem dir que el denominador és com $1+jX$ i aleshores faríem:

$$|1+jX| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{1^2 + X^2} = \sqrt{2} \Rightarrow 1 + X^2 = 2 \Rightarrow X^2 = 1 \Rightarrow X = \pm 1$$

Si ara retornem a la nostra funció i posem el què val x tindrem:

$$\frac{1}{2\xi}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm 2\xi$$ multipliquem els dos membres per $\omega\omega_0$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm 2\xi\omega_0\omega \Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 \mp 2\xi\omega_0\omega = 0 \Rightarrow \omega^2 \mp 2\xi\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0$$

Resolem ara l'equació:

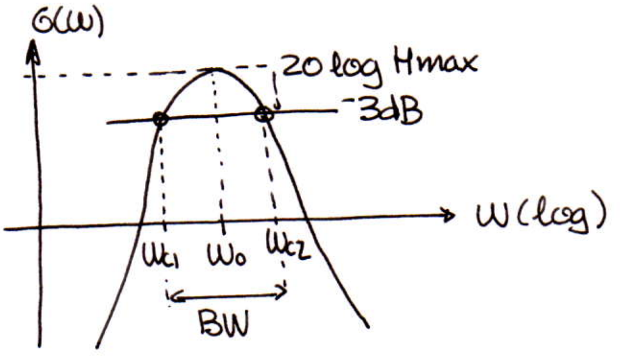
$$\omega = \frac{\pm \cancel{2}\xi\omega_0 \pm \sqrt{\cancel{4}\xi^2\omega_0^2 + \cancel{4}\omega_0^2}}{\cancel{2}} = \left[\pm\xi \pm \sqrt{1+\xi^2}\right]\omega_0$$

Veiem que tenim 4 solucions. N'hi ha de negatives, però només agafarem les positives, que són les que ens interessen:

$\sqrt{1+\xi^2}$ serà més gran que $\xi$, així les positives seran:

$$\omega_{c1} = \left(-\xi + \sqrt{1+\xi^2}\right)\omega_0$$

$$\omega_{c2} = \left(\xi + \sqrt{1+\xi^2}\right)\omega_0$$




L'ample de banda a -3dB serà:

$$\underset{\downarrow}{BW_{-3dB}} = \omega_{c2} - \omega_{c1} = 2\xi\omega_0$$

<u>B</u>and<u>W</u>idth

<u>Exemple</u>:

Suposem que tenim una funció de xarxa com la següent:

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + \underbrace{2s}_{2\xi\omega_0} + \underbrace{100}_{\omega_0^2}}$$

és un filtres pas banda amb $H_{max} = 1$, ja que el terme en s és igual que el numerador. Té la mateixa forma que el genèric que hem vist.

Hem vist que l'ample de banda és $2\xi\omega_0$. Així tindrem:

$BW = 2$ rad/s (Ho podem dir per simple inspecció)

$\omega_0 = 10$

$\xi = 0'1$ $(2\xi \cdot 10 = 2 \Rightarrow \xi = \frac{1}{10} = 0'1)$

Podríem escriure doncs la funció de xarxa com:

$$H(s) = \frac{BWs}{s^2 + BWs + \omega_0^2}$$

Un cop vist això, podem pensar en com hauria de ser un filtre per ser bo o dolent. Pot ser complicat, ja que per un mateix ampla de banda, és diferent si la freqüència central és gran o és petita. En general, semblaria que un filtre ~~bo~~ ha de ser bo si és estret. Això ho podrem veure definint factor de qualitat.

→ Factor de qualitat: Seria la freqüència central dividit per l'ample de banda.

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{f_0}{BW(Hz)}$$

Veiem alguns casos:

Si $f_0 = 2MHz$ i $BW = 2MHz \Rightarrow Q = 1$

$f_0 = 145MHz$ i $BW = 2MHz \Rightarrow Q = 72'5$

Una Q alta implica que el filtre és més bo, deixa passar un marge petit de freqüències comparat amb la freqüència central, però també és més difícil de construir el filtre.

Si tenim un filtre com el que hem anat utilitzant fins ara, caracteritzant per la següent H(s):

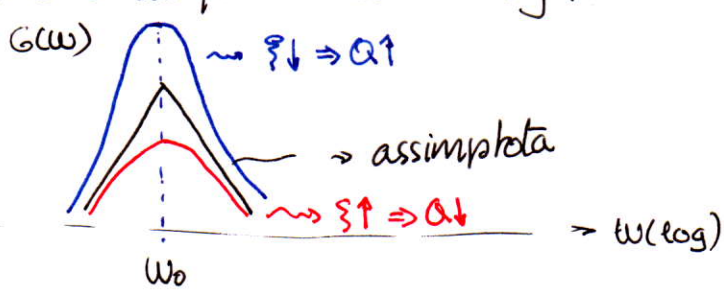
$$H(s) = H_{max} \cdot \frac{2\xi\omega_0 s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$ el factor de qualitat seria: $Q = \frac{\omega_0}{2\xi\omega_0} = \frac{1}{2\xi}$

Això vol dir que el factor de qualitat serà gran (filtre bo) si $\xi$ petita (pols propers a l'eix).

A vegades es posa la Q a l'expressió de $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = H_{max} \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Recordem com era la forma del Guany:



No hem vist encara com seria la fase, anem-ho a estudiar. Agafem el denominador i mirem com es comporta.

$$D = 1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

Si $\omega \to 0 \Rightarrow D = 1 - jQ\underbrace{\frac{\omega_0}{\omega}}_{\text{molt gran}} \Rightarrow$ fase $D = -90° \Rightarrow$ fase $H(j\omega) = 90°$

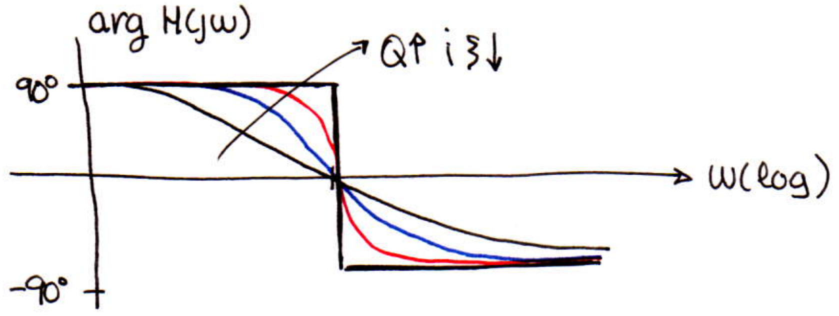
$\omega = \omega_0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow$ fase $D = 0° \Rightarrow$ fase $H(j\omega) = 0°$

$\omega \to \infty \Rightarrow D = 1 + jQ\underbrace{\frac{\omega}{\omega_0}}_{\text{molt gran}} \Rightarrow$ fase $D = 90° \Rightarrow$ fase $H(j\omega) = -90°$

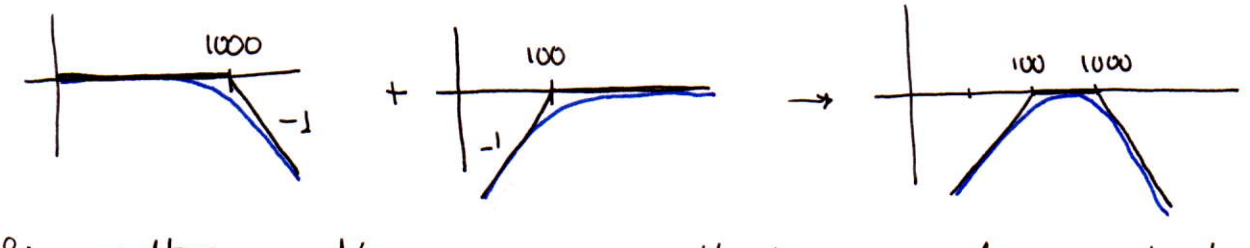
Si $\xi\downarrow \Rightarrow Q\uparrow$ el comportament de la fase serà molt similar a l'assímptota.

Si, en canvi, $\xi\uparrow \Rightarrow Q\downarrow$, la fase tindrà una forma més suau. Es veu observant el denominador, però també ho podríem veure tal com ho vam fer pel pas baix.

Així, gràficament tindríem:




Utilitzant aquest filtre pas banda tindrem unes limitacions. Si Q és alta, el podrem fer molt estret, però si ens interessés molt ample, la Q més petita val 0'5 (quan ξ val 1). Si ens interessés més ample, podríem utilitzar dos filtres junts, un pas baix i un pas alt amb pols reals. Per exemple un pas baix amb colze a 1000 i un pas alt amb colze a 100:

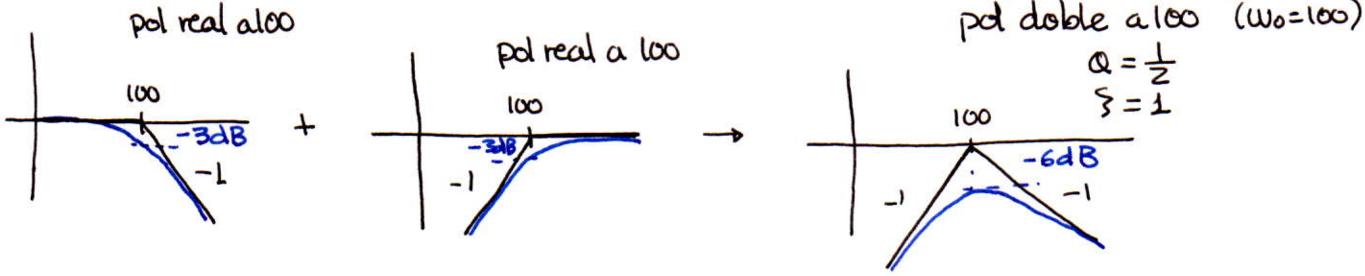



Si nosaltres agaféssim un pas alt i un pas baix amb el mateix colze, seria el mateix que tenir el pas banda amb $\xi = 1$ i $Q = \frac{1}{2}$, que suposaria un pol real doble.

Ens trobaríem però, que el pas banda el podríem variar tocant paràmetres (fent variar $\xi$ i per tant $Q$), i el conjunt pas baix més pas alt no podem variar res.

Vegem-ho amb el cas de $\omega_0=100$ o un pas alt i un pas baix de colze 100:

$s^2+2\omega_0+\omega_0^2=(s+\omega_0)^2$




Pel conjunt pas baix més pas alt, hauríem de calcular quin és l'ample de banda, però seria el mateix que el pas banda, que acabem de calcular:

$$BW = 2\xi\omega_0 = 2\cdot 1\cdot 100 = 200$$

## 5.3. DESCRIPCIÓ DE SENYALS AL DOMINI FREQÜENCIAL

Fins ara hem aconseguit veure què fan els circuits a diferents freqüències. Si ara som capaços de veure els diferents senyals en funció de la freqüència, podrem arribar a saber què fan els circuits a qualsevol senyal.

Parlarem primer de Fourier, que ens dirà com un senyal periòdic es pot posar en funció de sinus i cosinus, per passar després a veure el concepte de filtratge.

### 5.3.1. SÈRIE DE FOURIER

Les sèries de Fourier s'utilitzen amb senyals periòdics, amb els quals es compleix que:

$$x(t+T_0) = x(t) \quad \text{si } T_0 \text{ és el període.}$$

Qualsevol senyal periòdic es pot representar com a suma de senyals sinusoïdals (sinus i cosinus).

La sèrie complexa de Fourier ens diu:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \qquad \text{on } f_0=\frac{1}{T_0} \text{ (inversa del període del senyal)}$$

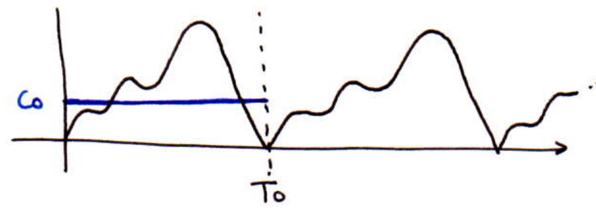
Qualsevol senyal tindrà aquesta forma i l'única cosa que els diferenciarà seran els $C_n$, que es calcularien:

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

Verem com seria el $c_0$, que és fàcil d'interpretar, i comentem-ne el significat.

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt$$ L'exponencial val 1, ja que $n=0$ i $e^0 = 1$.

Verem que estem buscant la mitja, que és la constant que millor aproxima el senyal.




Aquesta seria una primera aproximació del senyal. Lògicament, com més $C_n$ comptem, més s'aproximarà al senyal real.

Els altres termes verem que els podríem anar combinant, $c_n$ amb $c_{-n}$. Això ens donaria una suma o resta d'exponencials com $c_1 e^{j\Theta} \pm c_1 e^{-j\Theta}$, de manera que acabaríem sent sinus i cosinus.

En el cas concret que $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$, tindríem:

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

En aquest cas $c_1$ i $c_{-1}$ valdrien $\frac{1}{2}$.

En aquest cas els $c_n$ són reals, però podrien no ser-ho. De tota manera, igualment acabaríem tenint sinus i cosinus. Verem-ho:

Si el senyal és real, $c_n$ i $c_{-n}$ són complexes conjugats i els podríem posar en forma polar (mòdul i fase). El mòdul seria el mateix pels dos i la fase tindria el signe contrari (Podrien ser reals)

$$c_n e^{+j2\pi n f_0 t} + c_{-n} e^{-j2\pi n f_0 t} = |c_n| e^{j\varphi_n} \cdot e^{j2\pi n f_0 t} + |c_n| e^{-j\varphi_n} e^{-j2\pi n f_0 t} =$$

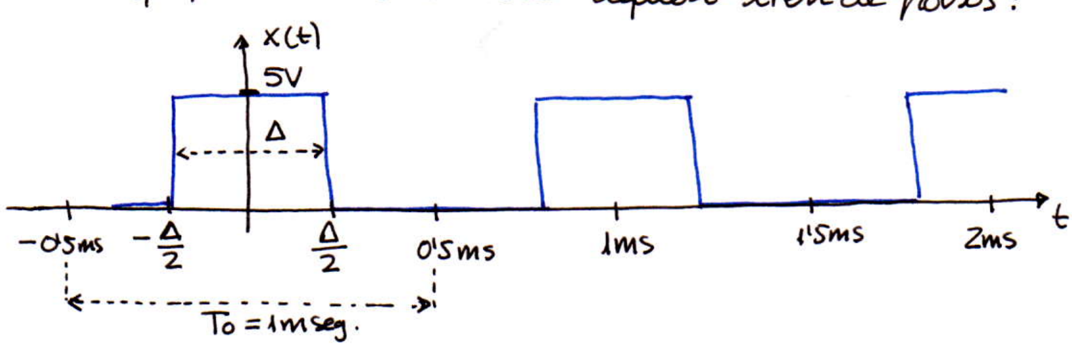
$$= |c_n| e^{j(2\pi n f_0 t + \varphi_n)} + |c_n| e^{-j(2\pi n f_0 t + \varphi_n)} = 2|c_n| \cdot \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

ja que $|c_n| = |c_{-n}|$ i $\varphi_n = -\varphi_{-n}$ si són complexes conjugats.

## 5.3.2. EXEMPLE: TREN DE POLSOS RECTANGULARS

Veiem com calcularíem els $c_n$ per aquest cas concret, d'un senyal periòdic format per polsos rectangulars, d'amplitud 5V, amplada del pols $\Delta$ i període 1 mseg. La freqüència serà doncs $10^3$ (1KHz).

Verem gràficament com seria aquest tren de polsos:



Veiem ara com calcularíem els $C_n$:

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt = \frac{1}{10^{-3}}\int_{-0'5\cdot 10^{-3}}^{0'5\cdot 10^{3}} x(t)\cdot e^{-j2\pi n 10^3 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{10^{-3}}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} 5\cdot e^{-j2\pi n\cdot 10^3 t}\,dt = \frac{5}{\cancel{10^{-3}}}\cdot \frac{e^{-j2\pi n\cdot 10^3 t}}{-j2\pi n\cdot \cancel{10^{3}}}\Bigg|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} =$$

$$= \frac{5}{-j2\pi n}\left[e^{-j\cancel{2}\pi n\cdot 10^3\cdot\frac{\Delta}{\cancel{2}}} - e^{j\cancel{2}\pi n\cdot 10^3\frac{\Delta}{\cancel{2}}}\right]$$

Com que sabem que : $\sin x = \dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$ tindrem:

$$C_n = \frac{5}{\pi n}\sin(\pi n 10^3 \Delta)$$

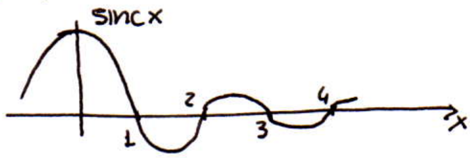
Suposem ara que $\Delta = 0'5ms$ (la meitat del període), seria un senyal quadrat. Aleshores els $C_n$ serien:

$$C_n = \frac{5}{\pi n}\cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{5}{2}\;\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\frac{\pi n}{2}} = \frac{5}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

Dividint a dalt i a baix per 2, ho podríem posar com una sinc.
Recordem que:

$$\mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \;;\; x\to 0 \Rightarrow \mathrm{sinc}\, x = 1 \text{ ja que } \sin\pi x \approx \pi x$$

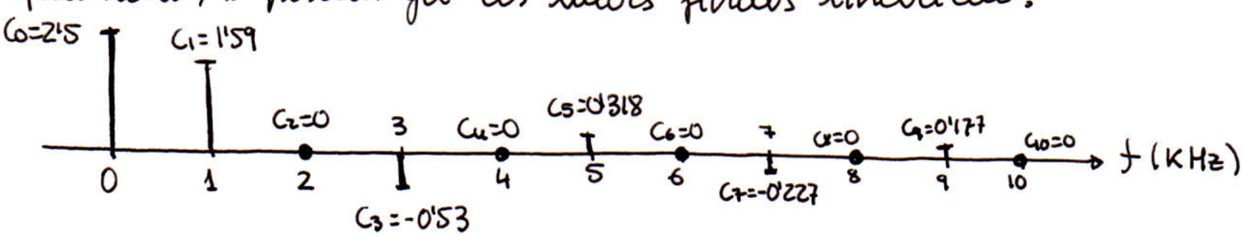
↳ S'anul·la en els enters i a l'origen val 1.




Ara podem buscar uns quants $C_n$:

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & n=0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 & C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 & C_9 \\
\frac{5}{2}[ & 1 & 0'636 & 0 & -0'212 & 0 & 0'127 & 0 & -0'0909 & 0 & 0'0707\;\cdots\;]
\end{array}$$

Podríem continuar, però cada vegada són més petits.
Gràficament, i posant ja els valors finals tindríem:




Seria totalment simètric per les freqüències negatives (n negatives).
De moment no podem comparar aquesta forma amb la del senyal quadrat, perquè aquell estava en un eix temporal i ara estem en un eix freqüencial, només tenim els $C_n$.

Si voleu veure el senyal en el temps, haureu de buscar la sèrie de Fourier. Com més $c_n$ agafeu, més s'assemblarà al senyal original.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

En aquest cas, tots els $c_n$ són reals.

Ara podeu buscar $c_0$ i anar combinant els $c_n$ i $c_{-n}$ obtenint així cosinus. Vegeu-ho per uns quants valors de $n$:

$c_0 \Rightarrow 2'5 \cdot e^0 = 2'5$

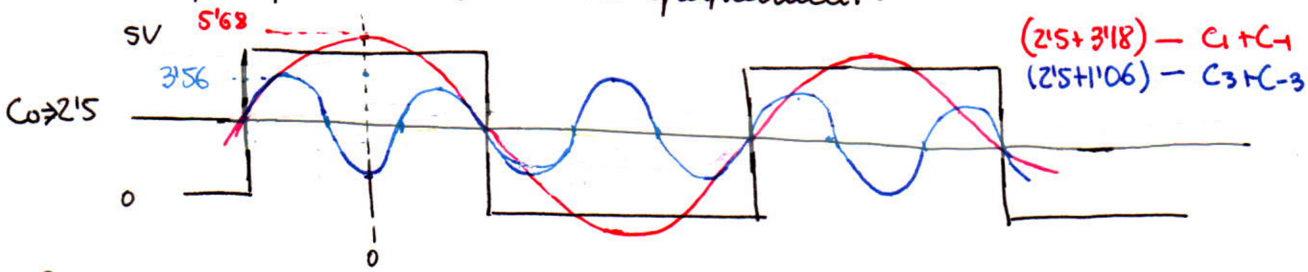
$c_1 + c_{-1} \Rightarrow 1'59 \cdot e^{j2\pi f_0 t} + 1'59 \cdot e^{-j2\pi f_0 t} = 3'18 \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

$c_2 + c_{-2} \Rightarrow 0 \cdot e^{j2\pi \cdot 2 f_0 t} + 0 \cdot e^{-j2\pi \cdot 2 f_0 t} = 0$ Dóna 0, però seria un cosinus de freqüència doble.

$c_3 + c_{-3} \Rightarrow -0'53 \cdot e^{j2\pi 3 f_0 t} - 0'53 \, e^{-j2\pi 3 f_0 t} = -1'06 \cdot \cos(2\pi 3 f_0 t)$

↳ tenim un cosinus invertit i de freqüència triple.

Podríem anar buscant-los tots i anar-los sumant als anteriors (cada vegada serien més petits). Com més n'agafeu, més s'assemblarà al senyal quadrat. Vegeu-ho gràficament.




Si sumèssim $c_1 + c_{-1} + c_3 + c_{-3}$, s'assemblaria més al senyal quadrat que si només agafem $c_1 + c_{-1}$ (en el gràfic ja està sumat el $c_0$).

Suposem ara que enlloc d'agafar $\Delta = 0'5$ ms, agaféssim $\Delta = 0'25$ ms. Aleshores tindríem:

$$c_n = \frac{5}{n\pi} \cdot \sin(\pi n 10^3 \Delta) = \frac{5}{\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) = \frac{5}{4} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\frac{\pi n}{4}} = \frac{5}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{4}\right)$$

Si busquéssim uns quants valors tindríem:

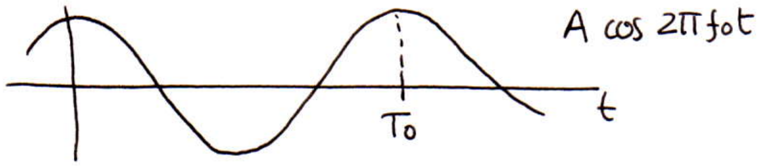
$c_0 = 1'25$, $c_1 = 1'125$, $c_2 = 0'79$, $c_3 = 0'375$, $c_4 = 0$, $c_5 = -0'225$, $c_6 = -0'265$, $c_7 = -0'16$

$c_8 = 0$, $c_9 = 0'125$, $c_{10} = 0'159$, $c_{11} = 0'1$, $c_{12} = 0$, $c_{13} = -0'086$, $c_{14} = -0'113$, ...

En general podrem calcular només les freqüències positives. En aquest cas que els $c_n$ són reals, són iguals al $c_{-n}$. Si fossin complexes, aleshores els valors negatius serien els conjugats. Al dibuixar-los caldria vigilar, ja que s'hauria de tenir en compte el mòdul i l'argument.

## 5.3.3. EXEMPLE: SENYAL SINUSOÏDAL

Estudiem com seria la sèrie complexa de Fourier d'un cosinus i com seria el seu espectre (domini freqüencial), que serien els seus $c_n$. Gràficament, en el temps, el cosinus seria:




Podriem escriure la seva sèrie de Fourier com:

$$x(t) = \sum c_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

Ja hem anat veient durant el curs que un cosinus es pot escriure:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \Rightarrow A\cos 2\pi f_0 t = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

D'aquí ja veiem directament quina és la sèrie de Fourier, i quins són els $c_n$. Veiem que només hi ha $c_1$ i $c_{-1}$ (la resta valen 0) i els dos valen $A/2$.

La sèrie seria com les altres:

$$x(t) = c_0 + c_1 e^{j2\pi f_0 t} + c_{-1} e^{-j2\pi f_0 t} + c_2 e^{j2\pi 2 f_0 t} + c_{-2} e^{-j2\pi 2 f_0 t} + \dots$$

però tots els $c_n$ valdrien 0 excepte $c_1$ i $c_{-1}$.

Així, l'espectre del senyal sinusoïdal, només tindrà components a dues freqüències, $f_0$ i $-f_0$.


A mates es fa servir $\omega_0$, però físicament té més sentit fer servir $f_0$ (tot s'acaba mesurant en Hz.

Ara hem vist com seria el cosinus, estudiem ara com seria el sinus.

Sabiem que:

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \longrightarrow A\sin 2\pi f_0 t = \frac{A}{2j} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j} e^{-j2\pi f_0 t}$$

D'aquí veiem doncs que els coeficients són:

$$c_1 = \frac{A}{2j} \quad i \quad c_{-1} = -\frac{A}{2j}$$

A l'hora de dibuixar-los, haurem de tenir en compte el seu mòdul i la seva fase.

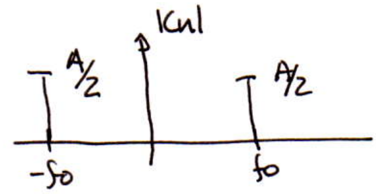
$|c_1| = \frac{A}{2}$ i $|c_{-1}| = \frac{A}{2}$

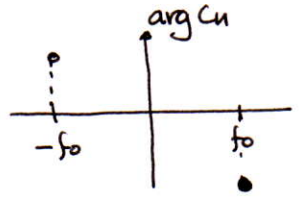
Ja vam dir que quan fossin complexes serien conjugats i tindrien el mateix mòdul. Busquem ara la fase:

$\arg \frac{A}{2j} = -90°$ → en forma polar escriuríem: $\frac{A}{2} e^{-j90°}$

$\arg \frac{-A}{2j} = 90°$ → en forma polar tindríem: $\frac{A}{2} e^{j90°}$

Gràficament, l'espectre (els $c_n$) serà:



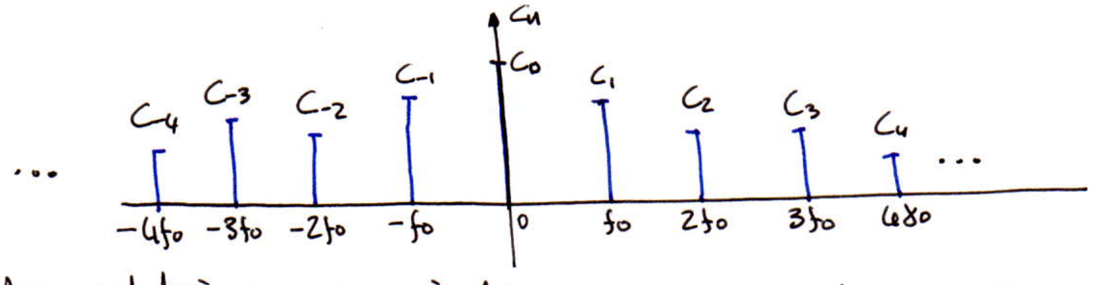

Així podríem escriure

$$x(t) = c_1 e^{j2\pi f_0 t} + c_{-1} e^{-j2\pi f_0 t} = \frac{A}{2} e^{-j90°} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{j90°} e^{-j2\pi f_0 t} =$$

$$= \frac{A}{2} e^{j(2\pi f_0 t - 90°)} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j(2\pi f_0 t - 90°)} = A \cos(2\pi f_0 t - 90°)$$

## 5.3.4. FILTRATGE

Per veure el tema de filtratge, partim de moment d'un senyal periòdic qualsevol, que vindrà descrit pel seu espectre (els $c_n$). Depenent del senyal, original tindrem components d'un valor o altre, el què està clar, és que sempre en tindrem a $0, f_0, 2f_0, \ldots$ i de manera simètrica a $-f_0, -2f_0, \ldots$




Ara caldrà veure què li passa a aquest senyal si atravessa un circuit. Ja hem anat veient fins ara que la resposta varia amb la freqüència, per tant és possible que per cada freqüència tinguem una resposta diferent. Això vol dir que, després de passar el senyal pel circuit, pot passar que alguns $c_n$ hagin crescut, altres hagin disminuït o fins i tot desaparegut.

Escrivint el senyal com la seva sèrie de Fourier, podrem dir:

$$x(t) = \sum c_n e^{j2\pi n f_0 t} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow ?$$

Haurem d'estudiar quina resposta tenim.

Si sabem quina és la resposta del circuit a $e^{j\omega t}$, ja sabrem tot el què necessitem, ja que treballem amb circuits lineals i el senyal el podem descomposar amb suma d'exponencials. Així doncs, mirem què li passa a $e^{j\omega t}$, descomposant-lo en sinus i cosinus:

$$e^{j\omega t} = \;\longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow |H(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi) + j|H(j\omega)| \cos(\omega t - 90° + \varphi) =$$

$= \cos \omega t + j \sin \omega t =$

$= \cos \omega t + j \cos(\omega t - 90°)$

sabem com afectava al cosinus.

(on $\varphi = \arg H(j\omega)$)

$$= |H(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi) =$$

$$= |H(j\omega)| \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j \arg H(j\omega)}$$

això és $H(j\omega)$ escrit en forma de mòdul i argument.

Així, podem dir que al passar $e^{j\omega t}$ per un circuit tindrem:

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}$$

Els fasors $e^{j\omega t}$ són els únics senyals que queden igual al passar per un circuit. Estan multiplicats per un factor, per tant poden ser més llargs o més curts, però no canvien la seva direcció. Coneixent aquest resultat, si el nostre senyal és una combinació lineal d'aquests fasors, voldrà dir que a la sortida, tindrem aquesta mateixa combinació lineal multiplicada per un coeficient. Per exemple:

$$2e^{j\omega_1 t} + 3e^{j\omega_2 t} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow 2H(j\omega_1) \cdot e^{j\omega_1 t} + 3H(j\omega_2) \cdot e^{j\omega_2 t}$$

Si ho generalitzem per un senyal descomposat en la seva sèrie de Fourier, tindrem:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot H(j2\pi n f_0) \cdot e^{j2\pi n f_0 t}}$$

A l'entrada, els coeficients de Fourier són els $c_n$, a la sortida els nous coeficients són:

$$c_n' = c_n \cdot H(j2\pi n f_0)$$

En principi, qualsevol senyal que sigui periòdic, el podrem expressar amb la seva sèrie de Fourier, i per tant, tractar d'aquesta manera.

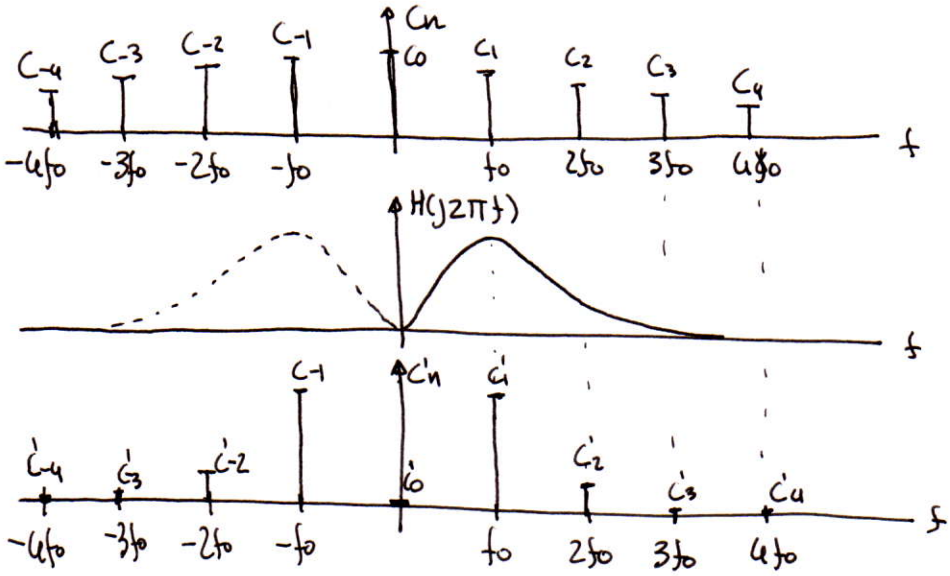
Segons el circuit que tenim, ens donarà una $H(s)$ concreta i farà una funció diferent (filtrarà unes freqüències). Si volem, podrem dissenyar el circuit perquè faci la funció que vulguem nosaltres.

Posem un exemple gràfic per veure què li passa al senyal d'entrada:

Entrada →

Circuit → (filtre)

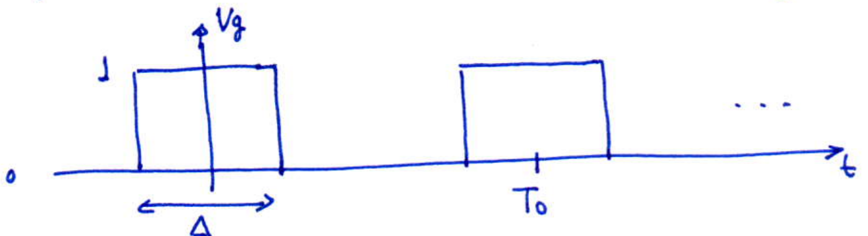
Sortida →




Veiem alguns exemples:

<u>EXEMPLE</u>:

Suposem un tren de polsos com el següent:

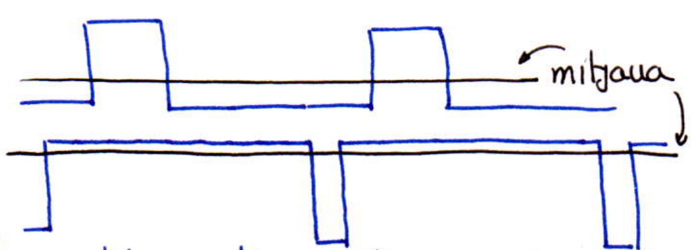



Direm $\eta$ (eta) al rendiment de cicle (percentatge de temps que val 1). El calcularem de la següent manera:

$\eta = \frac{\Delta}{T_0}$ (es sol donar en %)

Si $\Delta = \frac{T_0}{4} \Rightarrow \eta = 0'25 = 25\%$ ⟶

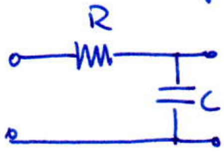
Si $\Delta = \frac{9}{10} T_0 \Rightarrow \eta = 0'9 = 90\%$ ⟶




El rendiment de cicle és important, conté molta informació. Tornant al senyal, com que és periòdic, podrem escriure la seva sèrie de Fourier.

En aquest cas, voldré trobar la mitja, que ve donada pel rendiment de cicle, i en concret, ens la dona el coeficient $c_0$. Per tant haurem de dissenyar un circuit que elimini tots els $c_n$ menys el $c_0$. Ens interessarà doncs un pas baix, i sabem que hi ha circuits senzills que ho són.

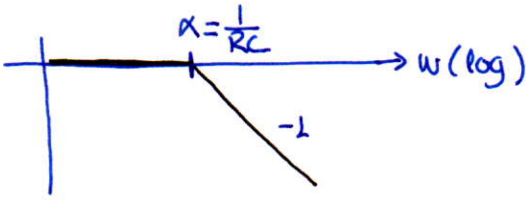
Veiem que en el fons necessitaríem un filtre pas baix, i ja n'hem vist alguns com el següent:




$$H(s) = \frac{1/Cs}{R + 1/Cs} = \frac{1}{RCs+1}$$

Per fer el diagrama de Bode ho posarem de la següent manera:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s}{\alpha}+1}$$ on $\alpha = \frac{1}{RC}$ en aquest cas el Bode era:




Suposem que la freqüència del senyal periòdic és $f = 10KHz$. Ens interessarà que a aquesta freqüència el senyal ja estigui molt atenuat. Hi ha alguns estàndards que indiquen quan caldria que que s'atenués, nosaltres suposarem en aquest cas que atenuem 1000 vegades, és a dir, volem tenir 60 dB menys.
El pendent del Bode d'aquest circuit és de 20dB/dècada. Així, si posem el colze 3 dècades per sota de 10KHz, a aquesta freqüència s'haurà atenuat els 60dB que volem.

Hem vist que el colze estava a $\alpha = 1/RC$ i això és $\omega$. Nosaltres tenim la freqüència $f_0 = 10KHz \rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0$ i volem que la $\omega$ del colze estigui 3 dècades (1000 vegades) per sota de $\omega_0$. Així:

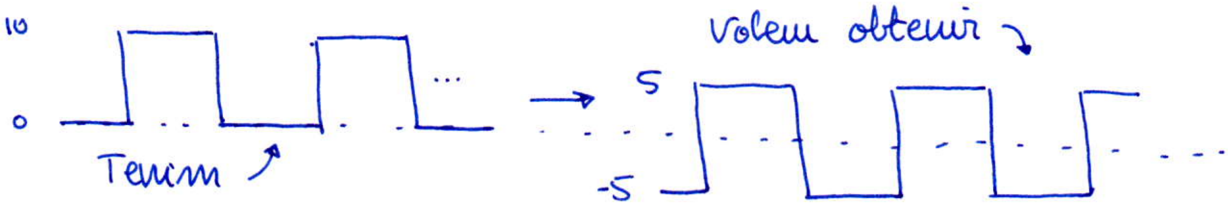
$$\frac{1}{RC} = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^3}{10^3} = 20\pi \Rightarrow RC = 0'016 = 16 \cdot 10^{-3}$$

Ara hauríem de dissenyar aquest filtre utilitzant uns valors de RC que complexin això o tinguin un valor major, ja que si $1/RC$ és menor, encara millor. Haurem d'agafar valors reals dels components, per exemple:

$$\left.\begin{array}{l} R = 180K\Omega \\ C = 100nF \end{array}\right\} RC = 180 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9} = 18 \cdot 10^{-3}$$
encara millor, ja que si $RC > 16 \cdot 10^{-3} \Rightarrow 1/RC \downarrow\downarrow$

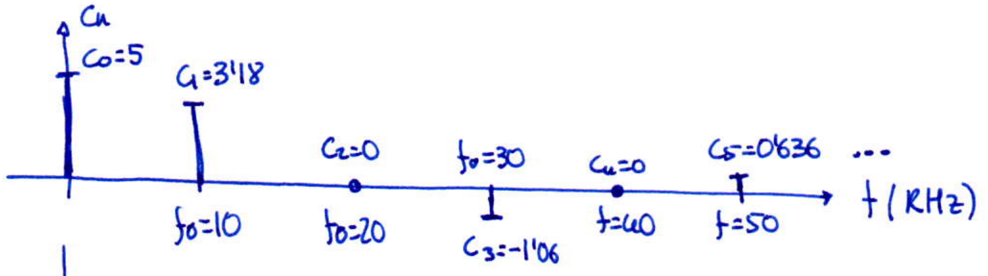
<u>EXEMPLE</u>:

Suposem ara que tenim un senyal quadrat que va de 0 a 10V i de freqüència $f_0 = 10KHz$. Volem treure-li la contínua, de manera que ens quedi un senyal quadrat igual, però entre -5 i 5V. Suposem que el senyal té un rendiment del 50%.



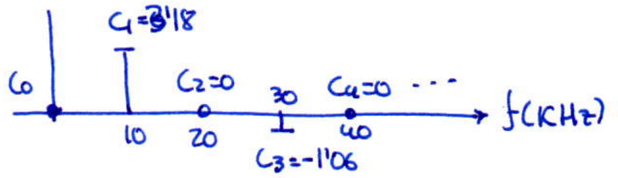

Aquest cas el vam estudiar per un senyal igual però d'amplitud 5V i freqüència 1KHz (en lloc de 10V i 10KHz). Els coeficients seran els mateixos, però d'amplitud doble.

Així serien:

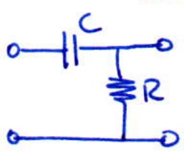



↳ $C_0$ és la component contínua i és la que volem suprimir al passar pel circuit.

↳ H(s) ⟶



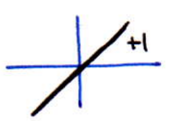

Necessitarem un circuit que sigui un pas alt. Això ho podem fer fàcilment amb un CR:



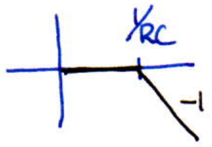

$$H(s) = \frac{R}{R+\frac{1}{Cs}} = \frac{RCs}{RCs+1} = RC\,\frac{s}{\frac{s}{1/RC}+1}$$

Veiem que té un zero a l'origen i un pol amb colze a $1/RC$.

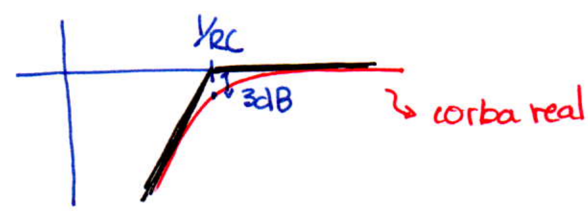
Zero →




pol →




⟶




Ens interessaria posar el colze per sota de 10KHz per tal que a partir d'aquesta freqüència no hi hagi atenuació, però sí que caldrà atenuar molt la contínua.

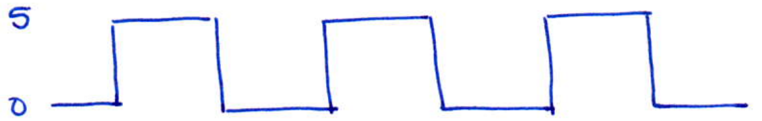
El podem posar dues dècades per sota, per assegurar que la corba real ja segui com l'asímptota.

$$\frac{1}{RC} \leq \frac{2\pi\cdot 10\cdot 10^3}{10^2} = 200\pi \rightarrow RC \geqslant 16\cdot 10^{-4} \rightarrow \begin{matrix} R = 180K\Omega \\ C = 10nF \end{matrix}$$

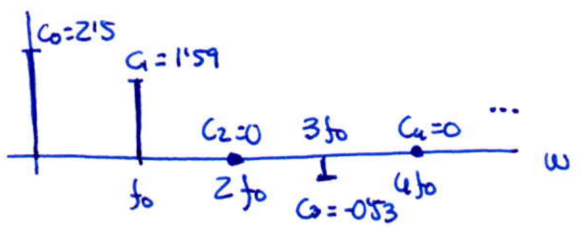
Igual que abans serà més gran, però millor.

EXEMPLE:

Suposem ara que tenim un senyal quadrat periòdic, que va de 0 a 5V, de freqüència $f_0 = 10KHz$, i a partir d'ell volem obtenir un senyal sinusoïdal.

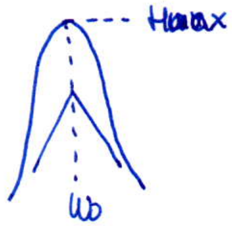



Ja hem buscat abans el seu espectre i tenim:




Voldrem quedar-nos només amb la component $c_1$, per tant necessitarem un filtre pas banda.

Recordem que havíem estudiat el filtre pas banda:




Hmax tant serà, no necessàriament ha d'amplificar.

$W_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \cdot 10 \cdot 10^3$

La Q serà important per tal d'eliminar les components adjacents.

Recordem que l'expressió de $H(j\omega)$ que vam trobar era:

$$H(j\omega) = H_{max} \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Voldrem que la component $c_1$ sigui 100 vegades més gran que la $c_3$, per tal que la puguem despreciar ($c_2$ ja és 0). Això voldrà dir que ha d'estar 40dB per sota.

$$1'59 \cdot |H(j\omega_0)| = 100 \cdot 0'53 \cdot |H(j3\omega_0)|$$

↓ harmònic desitjat ↓ 1er harmònic no desitjat

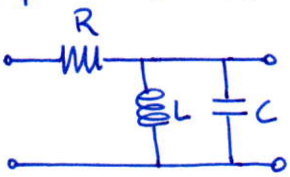
$|H(j\omega_0)| = H_{max}$

$$|H(j3\omega_0)| = H_{max} \frac{1}{\left|1 + jQ\left(3 - \frac{1}{3}\right)\right|} = H_{max} \frac{1}{\left|1 + jQ\frac{8}{3}\right|} = H_{max} \frac{1}{\sqrt{1^2 + Q^2\frac{64}{9}}}$$

$$1'59 \cancel{H_{max}} = 53 \cancel{H_{max}} \frac{1}{\sqrt{1 + 7'1 \cdot Q^2}} \Rightarrow 1 + 7'1 Q^2 = \left(\frac{53}{1'59}\right)^2$$

$$7'1 Q^2 = 1110'1 \Rightarrow Q^2 = \frac{1110'1}{7'1} \Rightarrow Q = 12'5$$

Ara ja tenim la Q. Primer hem mirat el Bode i hem descobert alguns paràmetres. Ara haurem de dissenyar el circuit, que podria ser com el següent.




Buscarem la funció de xarxa i la compararem amb l'anterior. A partir de Q i $w_0$, trobarem els valors de R, L i C.

$$L//C \Rightarrow \frac{Ls \cdot \frac{1}{Cs}}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{Ls}{LCs^2+1}$$

Ara podrem trobar la H(s) fent un divisor de tensió.

$$H(s) = \frac{\frac{Ls}{LCs^2+1}}{R + \frac{Ls}{LCs^2+1}} = \frac{Ls}{RLCs^2+Ls+R} = \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}}$$

Veiem doncs que té la forma del filtre que hem estudiat, on:

$$w_0^2 = \frac{1}{LC} \quad i \quad 2\xi w_0 = \frac{1}{RC} \quad \text{com que } Q = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow \frac{w_0}{Q} = \frac{1}{RC}$$

Q haurà de ser, com a mínim, 12'5. A partir d'aquí trobarem R, L i C.

$$(2\pi \cdot 10 \cdot 10^3)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow LC = (1'59 \cdot 10^{-5})^2 = 2'53 \cdot 10^{-10} \Rightarrow \begin{matrix} C = 250\,nF \\ L = 1mH \end{matrix}$$

→ posaríem 2C en paral·lel 150+100

$$\frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^3}{12'5} = \frac{1}{RC} \Rightarrow RC \geq 2 \cdot 10^{-4}$$

→ RC pot ser més gran

$R > 800$ pel C escollit. La podríem posar de 1kΩ.