4. CIRCUITS EN RÈGIM PERMANENT SINUSOÏDAL

En el tema anterior hem après quina era la resposta en règim permanent, i hem vist què passava si a l'entrada teníem excitacions constants (un graó). Ara estudiarem com és el règim permanent si tenim a l'entrada senyals sinusoïdals.

Parlarem de circuits estables, que permeten veure el règim permanent. Els inestables no ens interessaran perquè emmascaren el permanent amb senyals molt grans i no el podem veure.

Recordem els tipus de respostes que teníem:

ZERO-STATE (C.I.=0) } Resposta forçada (depèn de l'entrada)
Resposta lliure (depèn del circuit).

ZERO-INPUT (entrada=0) } Resposta lliure (depèn del circuit).

Pels circuits estables, la resposta lliure s'esmorteeix, amb la qual cosa, passat un temps, podrem veure la resposta forçada (que és la que depèn de l'entrada i ens interessa veure).

A vegades ens interessa posar les condicions inicials quan treballem amb circuits commutats (on són molt importants).

En cas que només ens interessi el permanent, a vegades voldrem veure el transitori, però només per saber què passa abans d'estabilitzar-se.

Per provar què passa al circuit, ja hem vist al tema anterior que ho podíem fer amb un graó, que és més fàcil, però per alguns circuits és més interessant entrar-hi senyals sinusoïdals. Per exemple, amb un amplificador d'àudio, entrant un graó, no sentiríem res, només un cloc, en canvi amb un senyal sinusoïdal, sentiríem un to continual.

Vegem quins són els motius pels quals ens interessa utilitzar senyals sinusoïdals:

- → S'assemblen més als senyals reals.
- → Són senzills de generar.
- → com que segons Fourier qualsevol senyal es pot escriure com a suma de sinusoides. Quan sapiguem com fer-ho amb un senyal sinusoïdal, ho podrem extrapolar a qualsevol altre senyal.

No seria interessant utilitzar un senyal quadrat, perquè seria com fer servir un graó, però periòdic.

Vegem doncs quin és el permanent per senyals sinusoïdals.

4.1. RESPOSTA EN RÈGIM PERMANENT A SENYALS SINUSOÏDALS

Donada una entrada $v_i(t)$ i la funció de xarxa que caracteritza el circuit, tindrem:

$$v_i(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow v_o(t)$$

$v_i(t) = \cos\omega t \cdot u(t)$ $\qquad$ $v_o(t)$?? no la sabem encara

$V_i(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ $\qquad$ $V_o(s) = H(s) \cdot \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

Descomposem ara $V_o(s)$ en fraccions simples:

$V_o(s) = \dfrac{A}{s-j\omega} + \dfrac{A^*}{s+j\omega} + \cdots \rightarrow$ tindrem altres termes que depenen de la funció de xarxa, que serà estable i s'extingirà.

Busquem ara els residus A i A^*:

$$A = H(s) \cdot \frac{s\,\cancel{(s-j\omega)}}{\cancel{(s-j\omega)}(s+j\omega)}\Bigg|_{s=j\omega} = H(j\omega) \cdot \frac{j\omega}{2j\omega} = \frac{1}{2} H(j\omega)$$

Com que A serà un nombre complexe tindrem:

$A = \frac{1}{2}\,|H(j\omega)| \cdot e^{j \arg H(j\omega)}$ $\qquad$ $A^* = \frac{1}{2}\,|H(j\omega)| \cdot e^{-j \arg H(j\omega)}$

A la fase n'hi direm φ ($\varphi = \arg H(j\omega)$).

Amb això, l'expressió en el temps serà:

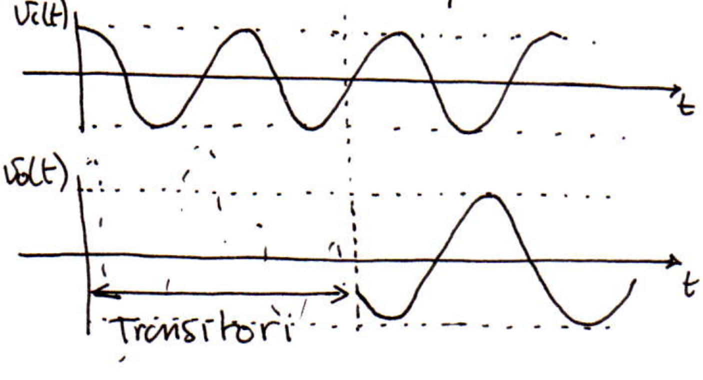
$$v_o(t) = \left[\frac{1}{2}|H(j\omega)|\,e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{2}|H(j\omega)| \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega t} + \cdots\cdots \right] \cdot u(t)$$

els altres termes de $H(s)$ que no hem calculat, però s'extingiran.

$$v_o(t) = \big[\,|H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \cdots\cdots \big]\, u(t)$$

↳ els altres termes

Si tal com hem dit el circuit és estable, els altres termes desapareixeran al cap d'un temps i només tindrem el permanent, de manera que:



El permanent tenim un cosinus de la mateixa freqüència, però amplitud i fase diferent.

Un cop hagin passat 4 o 5 vegades τ, tindrem només el cosinus i els altres termes hauran desaparegut. Aleshores tindrem només:

$$v_o(t) = |H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Nosaltres comencem a comptar sempre a partir de $t=0$, perquè per Laplace no podem tenir res abans. De fet, nosaltres podríem canviar l'origen de temps i posar-lo molt abans, de manera que el transitori passés abans de què nosaltres comencem a observar la sortida. D'aquesta manera veuríem només el cosinus a la sortida (règim permanent). Si aquest origen de temps nosaltres el poséssim molt d'hora, podríem dir:

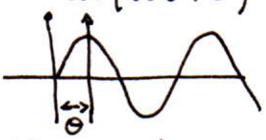
$\cos \omega t$ ——— $\boxed{H(s)}$ ——— $|H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

(sense multiplicar per $u(t)$) (mateix cosinus desfasat i amb amplitud diferent).

Veiem doncs que el circuit serà un sistema lineal caracteritzat per la seva funció de xarxa.

Per tal de poder tenir a l'entrada tant sinus com cosinus, afegirem una fase θ (zeta) al cosinus d'entrada, de manera que tindrem:

$A \cdot \cos(\omega t + \theta)$



A ——— $\times\, |H(j\omega)|$ ——— $A \cdot |H(j\omega)|$

θ ——— $+\arg H(j\omega)$ ——— $\theta + \varphi$

ω ——————— ω

CIRCUIT LINEAL

$v_o(t)$

$\downarrow$

$v_o(t) = A \cdot |H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \theta + \varphi)$

Veiem doncs que tenim el cosinus de la mateixa freqüència amb amplitud diferent i desfasat. Amb circuits lineals mai podrem obtenir freqüències diferents.

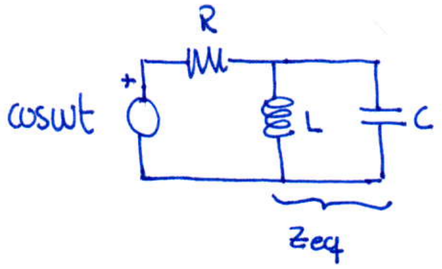
Hem posat un desfasament a l'entrada, ja ho hem comentat, però de fet aquest no és important, ja que depèn només d'on posem l'origen de temps. El què serà important és veure la diferència de fase entre l'entrada i la sortida.

(Nota: es podria fer símil amb un cotxe que passa per bonys i puja i baixa o una molla i jo baix pujant o baixant la mà).

Veiem algun exemple de tot això. Hem de tenir en compte que si l'entrada no la multipliquem per $u(t)$, voldrà dir que només ens interessa el permanent.

EXEMPLE:

Suposem el següent circuit pel qual ens interessa trobar el règim permanent per una entrada sinusoidal.



És un circuit R-L-C, pel qual haurem de buscar la funció de xarxa (això vol dir sense c.i) i només ens interessarà el permanent.

Busquem primer Z_{eq}, després tindrem tan sols un divisor de tensió.

$$Z_{eq}(s) = \frac{Ls \cdot \frac{1}{Cs}}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{Ls}{LCs^2+1}$$

Amb això, la funció de xarxa serà:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{Ls}{LCs^2+1}}{R + \frac{Ls}{LCs^2+1}} = \frac{Ls}{RLCs^2+Ls+R} = \frac{1}{RC}\,\frac{s}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}}$$

Donem els següents valors als components:

$C = 1\mu F$, $L = 10mH$, $R = 1K\Omega$

$$\frac{1}{RC} = \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 \quad ; \quad \frac{1}{LC} = \frac{1}{10^{-2}\cdot 10^{-6}} = \frac{1}{10^{-8}} = 10^8$$

Amb aquests valors trobem:

$$H(s) = \frac{10^3 \cdot s}{s^2+10^3 s+10^8}$$

Recordem que, en règim permanent, a la sortida tindrem el mateix cosinus amb amplificació $|H(jw)|$ i fase $\arg H(jw)$. Així que anem a buscar $H(jw)$ per uns quants valors de la pulsació w.

$w=0 \rightarrow H(j0)=0$

$$w=10 \rightarrow H(j\cdot 10) = \frac{j\,10^4}{\underbrace{-10^2}_{\text{despreciable}}+j\,10^4+10^8} \simeq \frac{j\cdot 10^4}{10^8} = j\,10^{-4} = \underset{\text{mòdul}}{10^{-4}}\, e^{\overset{\text{fase}}{j90^\circ}}$$

$$v_i(t) = \cos 10\cdot t \Rightarrow v_o(t) = 10^{-4}\cos(10t+90^\circ)$$

$$w=10^2 \rightarrow H(j\cdot 10^2) = \frac{j\,10^5}{-10^4+j\cdot 10^5+10^8} \simeq \frac{j\cdot 10^5}{10^8} = j\cdot 10^{-3} = 10^{-3}\cdot e^{j90^\circ}$$

$$v_i(t) = \cos 10^2\cdot t \Rightarrow v_o(t) = 10^{-3}\cos(10^2 t+90^\circ)$$

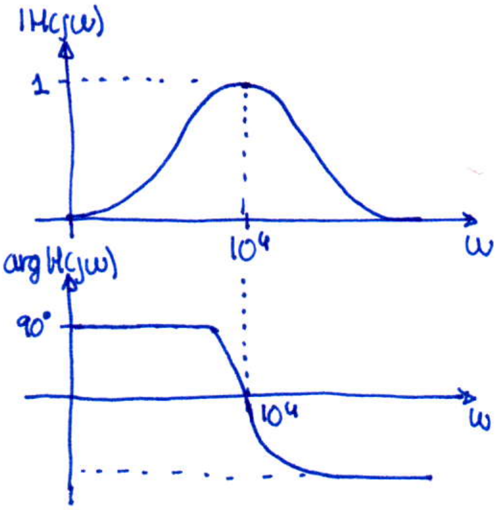
$$\omega = 10^4 \to H(j\cdot 10^4) = \frac{j\,10^7}{\cancel{-10^8} + j\cdot 10^7 \cancel{+10^8}} = 1 = 1\cdot e^{j0^\circ}$$

$$v_i(t) = \cos 10^4 t \Rightarrow v_o(t) = \cos\cdot 10^4 t$$

$$\omega = 10^5 \to H(j\cdot 10^5) = \frac{j\cdot 10^8}{-10^{10} + \underbrace{j10^8 + 10^8}_{\text{despreciable}}} \simeq \frac{j\cdot 10^8}{-10^{10}} = -j10^{-2} = 10^{-2}\, e^{-j\cdot 90^\circ}$$

$$v_i(t) = \cos 10^5 t \Rightarrow v_o(t) = 10^{-2}\cos(10^5 t - 90^\circ)$$

Ara podríem mirar com evolucionaria el mòdul i la fase de $H(j\omega)$ en funció de ω:



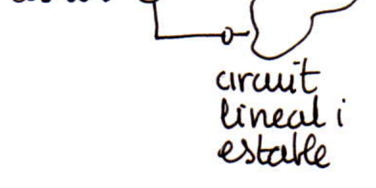
Hem vist que per $\omega=0$ val 0 i després va creixent fins a 10^4 que val 1. Després torna a decréixer, de fet per ∞ torna a valer 0.

La fase hem vist que passa de valer 90° a -90° i, precisament en 10^4 (màxim del mòdul) és quan passa per 0°.

Veiem que aquest circuit es comporta com un filtre, que deixa passar certes freqüències (les que envolten 10^4) i la resta no.
La fase a vegades no és important (per exemple en la transmissió de música), però a vegades sí (com en el vídeo digital per exemple).

4.2. FASORS

Com que treballarem molt amb els senyals sinusoïdals, veurem que amb fasors es poden tractar molt bé. Anem a veure com ho podem fer:



Hem vist que per qualsevol circuit lineal i estable, amb entrada sinusoïdal, en règim permanent, qualsevol variable d'aquest circuit tindrà la següent forma.

$A\cdot\cos(\omega t + \varphi)$ (ω serà la mateixa)

Ens apareixerà una amplitud i una fase

Com que sabem que:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Podríem dir que:

$$A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left[A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\right] = \mathrm{Re}\left[\underbrace{A \cdot e^{j\varphi}}_{\downarrow} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}\right]$$

↳ igual per tots els senyals

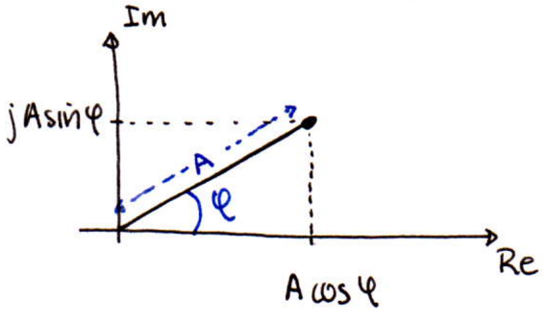
FASOR: el que diferenciarà els senyals del circuit.

Donat un cosinus, veiem el seu fasor associat:

$$2 \cdot \cos(\omega t + 30^\circ) \longrightarrow 2 \cdot e^{j30^\circ}$$

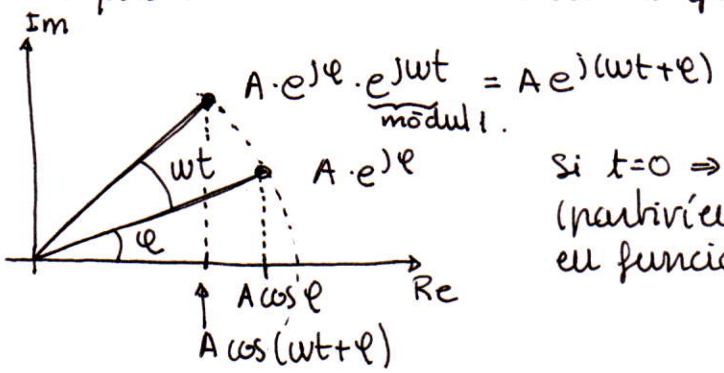
$$5 \cdot e^{-j45^\circ} \longrightarrow 5 \cdot \cos(\omega t - 45^\circ)$$

El fasor es pot representar gràficament:



Com que nosaltres fem això per treballar amb cosinus, ens interessarà la part real.

Donat un fasor concret, si el multipliquem per $e^{j\omega t}$ (serà sumar-li una fase) i busquem la part real, trobarem el cosinus que ens interessa. Veiem-ho gràficament:

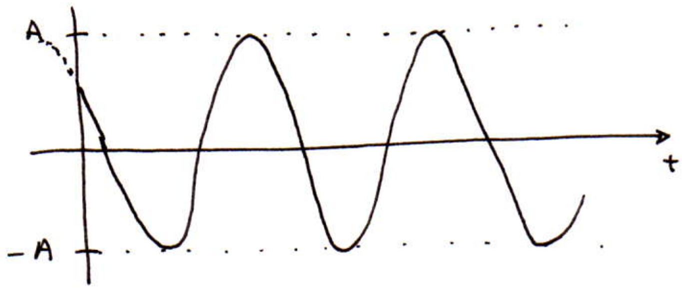


Si $t = 0 \Rightarrow e^{j\omega t} = e^{j0} = 1$

(partiríem de $Ae^{j\varphi}$. La fase creixeria en funció de t).

Veiem doncs que, si anem variant t, tindrem sempre un fasor de mòdul A que anirà variant la seva fase en funció del temps (s'anirà movent en un cercle). Com que ens interessa la part real, veurem doncs que es parteix d'un valor (degut a la fase φ) i la part real decreix, es fa zero, després negativa, torna a créixer, passa novament per zero, creix més, fins que arriba al punt de partida (1 volta sencera = un període). Després seguiria donant voltes.

Així, amb el pas del temps, aniríem dibuixant una sinusoide:



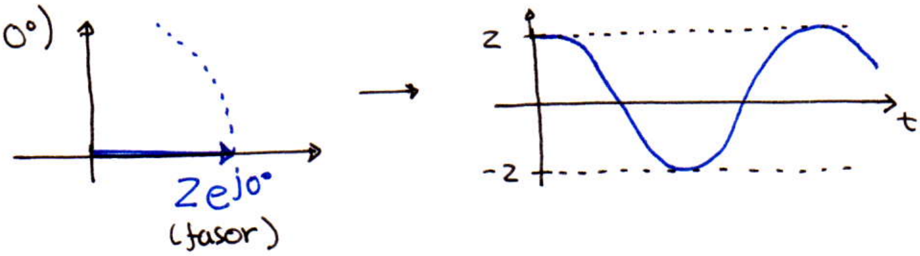
Veiem doncs que, ho fem com ho fem, tindrem:

$$v_i(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow v_o(t)$$

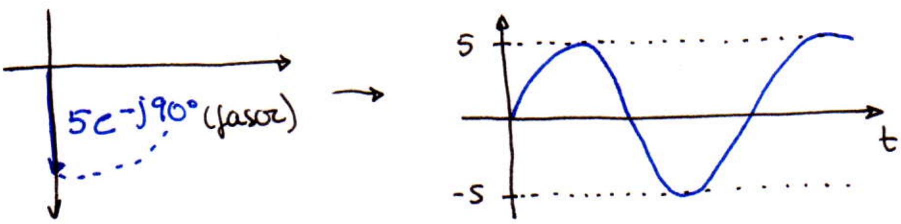
$$\cos \omega t \qquad\qquad |H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \arg H(j\omega))$$

Veiem alguns casos concrets:

$v(t) = 2 \cdot \cos(\omega t + 0°)$



$v(t) = 5 \cdot \sin(\omega t) =$
$= 5 \cos(\omega t - 90°)$



Veiem doncs que el fasor és un nº complexe que conté la mateixa informació que un senyal sinusoïdal.
Ara haurem de veure què passa quan passem una sinusoide (o el seu fasor) a través d'un circuit, per saber com l'hem de tractar:

4.2.1. SINUSOÏDES I FASORS A TRAVÉS DE CIRCUITS

De moment ja hem vist que li passa a una sinusoide quan passa per un circuit. Ara volem veure què li passa al seu fasor associat.

$$A \cdot \cos(\omega t + \Theta) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow A \cdot |H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \Theta + \arg H(j\omega))$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$A e^{j\Theta} \qquad\qquad A \cdot |H(j\omega)| \cdot e^{j(\Theta + \arg H(j\omega))}$$

$$A e^{j\Theta} \cdot \underbrace{|H(j\omega)| \cdot e^{j \arg H(j\omega)}}_{H(j\omega)}$$

Havíem escrit $H(j\omega)$ (que és un nombre complexe) amb forma polar, mòdul i argument. Si ens interessa, podem tornar a deixar-ho tot junt. Considerant-ho així, veiem que els circuits lineals i estables, el que fan és multiplicar el seu fasor d'entrada per $H(j\omega)$.

$$A e^{j\theta} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow H(j\omega)\cdot A \cdot e^{j\theta}$$

Parlem ara un moment de nomenclatura. Recordem que a una variable transformada l'escrivíem normalment en majúscules $V(s)$ (però algunes vegades no, però havíem de saber que estàvem en el domini transformat). Als fasors els anomenarem amb majúscules i una ratlla a sota normalment, per exemple: $\underline{V} = V_m e^{j\theta}$ (però a vegades ho escriurem sense la ratlla).

Haurem de mirar de saber sempre (pel context, a vegades) de què estem parlant, ja que a vegades podem tenir:

$v(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \theta)$ o enllos de V_m podem tenir, $V, v, \ldots$

Per exemple: $v(t) = 5\cos(\omega t + 30°) \rightarrow \underline{V} = 5 e^{j30°}$
↳ a vegades direm $V = 5e^{j30°}$

Simplement hem de vigilar i anar en compte de no fer-nos un embolic i saber què és cada cosa.

Amb tot això que hem dit fins ara podem dir que al passar un fasor per un circuit tindrem:

$$\underline{V_i} = A\cdot e^{j\theta} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow \underline{V_o} = H(j\omega)\cdot \underline{V_i}$$

4.3. CIRCUIT TRANSFORMAT FASORIAL

Fins ara hem treballat amb el circuit en el domini temporal i també en el domini transformat de Laplace.

Hem vist però, que en règim permanent sinusoïdal, busquem $H(s)$, però després particularitzem per $s = j\omega$. Així doncs, podem mirar de treballar ja amb fasors des del primer moment, i mirar com transformaríem el circuit per treballar directament amb aquests valors de s.

Hem de tenir en compte que si l'entrada és un fasor, qualsevol variable del circuit també serà un fasor.

Pensant en tot això, tornem als inicis, és adir, recordem que per descriure un circuit, teníem les equacions d'interconnexió (KCL's i KVL's), que descriuen la topologia del circuit (i vam veure que en el domini transformat de Laplace quedaven igual). També tenim les equacions constitutives dels elements. Anem a veure primer com serien els KVL's en un circuit en règim permanent sinusoïdal (R.P.S). Després veurem també com són els KCL's i les equacions dels elements.

→ KVL's en RPS:

En el domini temporal teníem en general:

$$\sum_{k=1}^{m} v_k(t) = 0 \quad \forall t$$

Si treballem amb senyals sinusoïdals tindrem en concret:

$$\sum_{k=1}^{m} V_{mk} \cdot \cos(\omega t + \phi_k) = 0 \quad \forall t \quad \text{(ara estem en RPS)}$$

$$\sum_{k=1}^{m} Re\left[V_{mk} \cdot e^{j\phi_k} \cdot e^{j\omega t}\right] = 0$$

Si la suma de parts reals és igual a la part real de la suma:

$$Re\left[\sum_{k=1}^{m} V_{mk} \cdot e^{j\phi_k} \cdot e^{j\omega t}\right] = 0$$

D'aquí podem treure factor comú $e^{j\omega t}$ i tindrem:

$$Re\left[e^{j\omega t} \sum_{k=1}^{m} V_{mk} e^{j\phi_k}\right] = 0$$

Per tal que això valgui zero, haurà de ser zero el sumatori:

$$\sum_{k=1}^{m} V_{mk} e^{j\phi_k} = 0 \rightarrow \text{Això són els fasors, podem dir: } \boxed{\sum_{k=1}^{m} \underline{V_k} = 0}$$

El KVL serà el mateix, però amb els fasors.

→ KCL's en RPS:

En el domini temporal tindríem en general:

$$\sum_{k=1}^{m} i_k(t) = 0 \quad \forall t$$

Veiem que té la mateixa forma que els KVL's, per tant faríem la mateixa demostració i arribaríem a la conclusió que serà el mateix sumar variables que fasors:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} \underline{I_k} = 0}$$

→ **Equacions constitutives:**

En el domini transformat de Laplace, havíem representat R, L i C per mitjà d'impedàncies, algunes en funció de s.

$Z(s)$ ↓$I(s)$ + $V(s)$ − $\longrightarrow V(s) = Z(s) \cdot I(s)$

Podríem interpretar aquesta impedància com una funció de xarxa amb entrada I i sortida V. Sabem que en RPS tenim:

$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \theta) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow v(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$H(s) = Z(s)$$

En RPS tenim: $\underline{V} = Z(j\omega) \cdot \underline{I}$

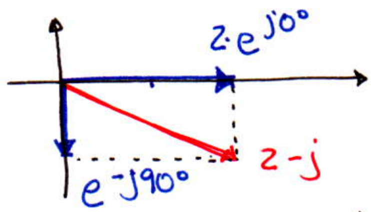
(Recordem que tenim sempre a la sortida l'entrada multiplicada per $H(j\omega)$)

Així doncs, en règim permanent sinusoïdal, podem substituir les variables per fasors i les s per $j\omega$, de manera que tindrem:

R (resistència)	$\rightarrow \underline{V} = R \cdot \underline{I}$
L (bobina)	$\rightarrow \underline{V} = j\omega L \cdot \underline{I}$
C (condensador)	$\rightarrow \underline{V} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$

El fet de treballar amb fasors ens pot facilitar la feina, ja que és fàcil sumar-los. Fem una prova per sumar un sinus i un cosinus:

$$2\cos\omega t + 1\sin\omega t =$$
$$= \sqrt{5}\cos(\omega t - 26'5°)$$



(recordem que $\sin\omega t = \cos(\omega t - 90°)$)

El nombre complex $2-j$ serà:

mòdul $= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\arg = \mathrm{arctg}\,\frac{-1}{2} = -26'5°$

$\Bigg\}$ fasor $\sqrt{5}\, e^{-j26'5°}$

senyal $\sqrt{5} \cdot \cos(\omega t - 26'5°)$

4.3.1. COMPORTAMENT ASSIMPTÒTIC

Veiem doncs que tot dependrà de la freqüència de treball. Així doncs, per freqüències molt baixes o molt altes podrem fer aproximacions.

• $\omega \to 0$ (baixa)

L: $Z = j\omega L$ si $\omega \to 0 \Rightarrow$ c.c.

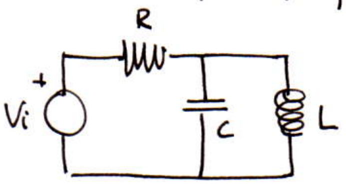
C: $Z = \frac{1}{j\omega C}$ si $\omega \to \infty \Rightarrow$ c.o.

• $\omega \to \infty$ (alta)

L: $Z = j\omega L$ si $\omega \to \infty \Rightarrow$ c.o.

C: $Z = \frac{1}{j\omega C}$ si $\omega \to \infty \Rightarrow$ c.c.

Recordem que abans hem estudiat el següent circuit, i hem vist que la sortida és màxima per una determinada freqüència i era nul·la per freqüència 0 ó ∞.

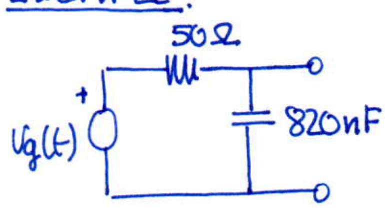


Algunes coses ja les podríem deduir sobre el circuit. Vo val 0 tant per $\omega = 0$ ($L = c.c.$) com per $\omega = \infty$ ($C = c.c.$)

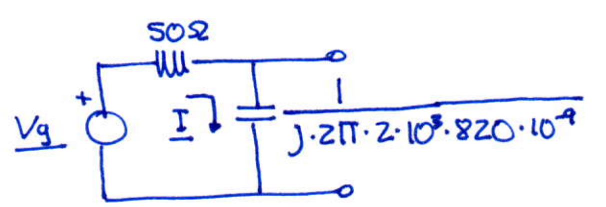
Veiem doncs que per simple inspecció del circuit, podem saber algunes coses. Per exemple serà estable (o marginalment estable, en el pitjor dels casos), perquè no hi ha elements actius. També podem veure per quines freqüències la sortida serà nul·la.

Veiem algun exemple de tot plegat.

EXEMPLE:



circuit transformat fasorial



$v_g(t) = 5\cos\omega t$

$\omega = 2\pi\cdot f$, $f = 2KHz$

$\omega = 2\cdot\pi\cdot 2\cdot 10^3$

$\underline{V_g} = 5\cdot e^{j0°}$ (recordem que $\omega = 2\pi\cdot 2\cdot 10^3$)

$$C \to \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\,4\cdot\pi\cdot 820\cdot 10^{-6}} = -\frac{j}{1'03\cdot 10^{-2}} = -97j$$

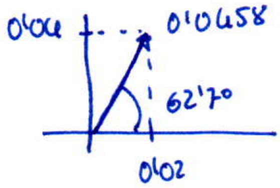
$$\underline{I} = \frac{\underline{V_g}}{50 - j97} = \frac{5}{50-j97} = \frac{5\cdot e^{j0°}}{\sqrt{50^2+97^2}\,e^{-j62'7°}} = \frac{5\,e^{j0°}}{109'13\cdot e^{-j62'7°}} = 0'0458\cdot e^{j62'7°}$$

També podríem haver trobat aquest valor fent:

$$\frac{5}{50-j97} = \frac{5\,(50+j97)}{(50-j97)(50+j97)} = \frac{250+j485}{50^2+97^2} = \frac{250+j485}{11.909} = 0'02 + j\,0'04$$

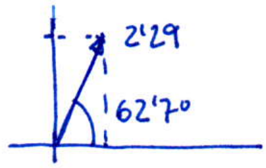
$I = 0'0458\cdot\cos(2\pi\cdot 2\cdot 10^3 t + 62'7°)$

El fasor serà :



Anem a veure ara quan valdria la tensió a la resistència:

$\underline{V_R} = 50 \cdot \underline{I} = 50 \cdot 0'0458 \cdot e^{j62'7°} = 2'29\, e^{j62'7°}$

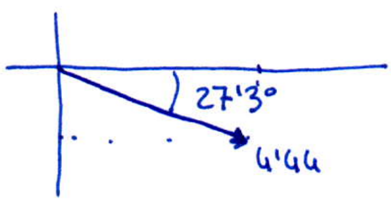


Aquest serà el fasor de la tensió a la resistència. Veiem que té la mateixa direcció que la I.

$v_R(t) = 2'29 \cdot \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 t + 62'7°)$

Busquem ara la tensió al condensador :

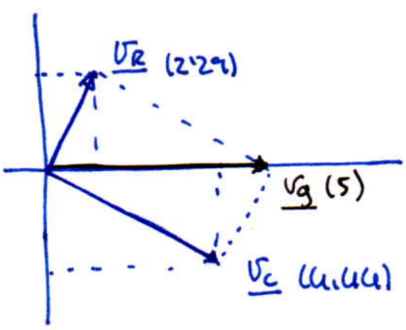
$\underline{V_C} = -97j \cdot \underline{I} = 97 \cdot e^{-j90°} \cdot 0'0458 \cdot e^{j62'7°} = 4'44 \cdot e^{-j27'3°}$



Veiem que fa 90° amb la tensió a la resistència.

$v_C(t) = 4'44 \cdot \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 t - 27'3°)$

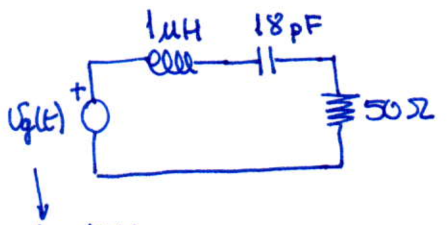
Segons el KVL, la suma de $\underline{V_R}$ i $\underline{V_C}$ hauria de donar $\underline{V_g} = 5$. Comprovem-ho gràficament:



$\underline{V_R} + \underline{V_C} = 2'29\, e^{j62'7°} + 4'44\, e^{-j27'3°} = 5 + 0j$

EXEMPLE:

Trobar I i les tensions a tots els elements.



A = 10V

f = 38 MHz

$Z_L = jwL = j \cdot 2\pi \cdot 38 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} = j\,238'7$

$Z_C = \frac{1}{jwC} = -\frac{j}{wC} = -\frac{j}{2\pi \cdot 38 \cdot 10^6 \cdot 18 \cdot 10^{-12}} = -\frac{j}{4'297 \cdot 10^{-3}}$

$= -j\,232'7$

$Z_R = 50$

$Z = Z_L + Z_C + Z_R = \underbrace{j238'7 - j\,232'7}_{\approx 0} + 50 \approx 50$

Amb aquesta aproximació buscaríem la $\underline{I}$ i tindríem:

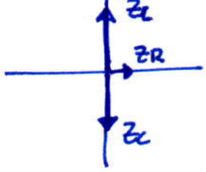
$$\underline{V_g} = 10\,e^{j0^\circ} \quad \rightarrow \quad \underline{I} = \frac{10\,e^{j0^\circ}}{50} = 0'2\,e^{j0^\circ}$$

Les tensions serien (considerem les impedàncies de L i C iguals i de signe contrari ≈ 236):

$$\underline{V_L} = \underline{I} \cdot Z_L = j236 \cdot \underline{I} = 236 \cdot e^{j90^\circ} \cdot 0'2\,e^{j0^\circ} = 47'2\,e^{j90^\circ}$$

$$\underline{V_C} = \underline{I} \cdot Z_C = -j236 \cdot \underline{I} = 236 \cdot e^{-j90^\circ} \cdot 0'2\,e^{j0^\circ} = 47'2 \cdot e^{-j90^\circ}$$

$$\underline{V_R} = \underline{I} \cdot Z_R = 50 \cdot \underline{I} = 50 \cdot 0'2 \cdot e^{j0^\circ} = 10\,e^{j0^\circ} \approx V_i$$



Veiem que en RPS ens podem trobar tensions grans a L i C, que a determinades freqüències es poden cancel·lar (degut a les seves fases). Això pot passar perquè C i L són oposats (tenen signe diferent).

En general, podríem veure que es cancel·larien si:

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\omega L - \frac{j}{\omega C} = \frac{j\omega^2 LC - j}{\omega C}$$

Si $\omega^2 LC$ val 1 es cancel·laria $\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

4.4. RESISTÈNCIA, REACTÀNCIA, CONDUCTÀNCIA I SUSCEPTÀNCIA

Si tenim una impedància en el domini transformat, i té s, quan treballem en R.P.S, tindrem $j\omega$ en el lloc de s, per tant tindrem un nombre complexe.

En general podem dir que:

$$Z(s) \longrightarrow Z(j\omega) = R + jX$$

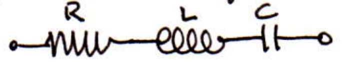
Impedància en [s]

Si és un nombre complexe, pot tenir part real i part imaginària.

$R = \mathrm{Re}[Z] \rightarrow$ RESISTÈNCIA

$X = \mathrm{Im}[Z] \rightarrow$ REACTÀNCIA.

Suposem el següent cas:



$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \underbrace{R}_{R} + j\underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}_{X}$$

Sempre acabarem tenint una reactància i una resistència

Igualment podríem trobar la inversa de la impedància, que seria l'admitància:

$Y(s)$ ⟶ $Y(s) = G + jB$

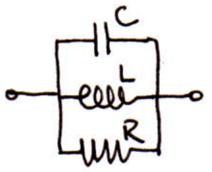
admitància en [S]

Si és un nombre complexe, pot tenir part real i part imaginària.

$G = Re[Y]$ → conductància

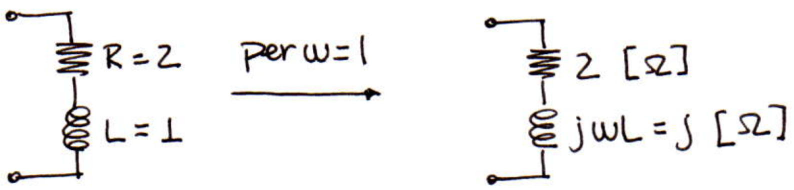
$B = Im[Y]$ → susceptància

Suposem el cas següent:



$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \underbrace{\frac{1}{R}}_{G} + j\underbrace{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}_{B}$$

Vegem un cas per uns valors concrets dels elements i de la pulsació:



Així doncs la impedància serà:

$Z = 2 + j$ Resistència $R = Re[2+j] = 2$

Reactància $X = Im[2+j] = 1$

Si ara volem saber l'admitància, haurem de buscar la inversa:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{2+j} = \frac{2-j}{(2-j)(2+j)} = \frac{2-j}{2^2+1^2} = \frac{2-j}{5} = 0'4 - j0'2$$

multiplico pel conjugat a dalt i a baix.

$Y = 0'4 - j0'2$ Conductància $G = Re[0'4 - j0'2] = 0'4$

Susceptància $B = Im[0'4 - j0'2] = -0'2$

Fixem-nos doncs que la conductància no és la inversa de la resistència ni la susceptància no és la inversa de la reactància. Les hem de calcular a partir de la inversa de la impedància.

$$Y = \frac{1}{Z} \quad \text{però} \quad G \neq \frac{1}{R} \quad i \quad B \neq \frac{1}{X}$$

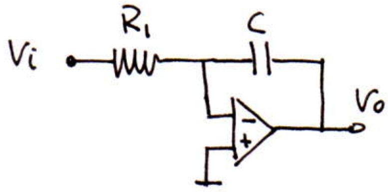
Amb l'Octave es pot fer fàcilment aquesta inversa, simplement dividint 1 pel nombre complexe.

4.5. COMPORTAMENT ASSIMPTÒTIC

Per tenir una idea del què fan els circuits, podem mirar fàcilment com actuen quan $\omega \to 0$ i $\omega \to \infty$ ja que aleshores les impedàcies de bobina i condensador es poden substituir per c.c. o c.o segons el cas. D'això se'n diu el comportament assimptòtic.

Veiem per alguns casos com faríem aquest estudi.

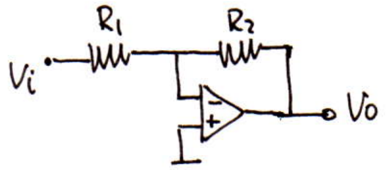
Recordem ara el funcionament d'aquests dos circuits, ja estudiat a Teoria de Circuits:



Vam veure que era un integrador. El seu fasor de sortida seria:

$V_0 \cdot CS = -\frac{V_i}{R_1} \to V_0 = -\frac{V_i}{R_1 CS}$ $\left(\text{Directament: } V_0 = -\frac{1/CS}{R_1} V_i \right)$ com inversor si $C = R_2$

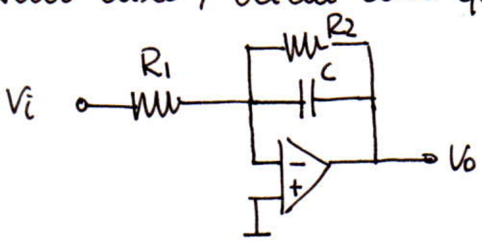
$$\underline{V_0} = -\frac{1}{j\omega R_1 C}\underline{V_i} = \frac{j}{\omega R_1 C}\cdot \underline{V_i}$$



Això seria un inversor. Si no recordem la sortida l'analitzaríem:

$\frac{V_0}{R_2} = -\frac{V_i}{R_1} \to V_0 = -\frac{R_2}{R_1}\cdot V_i$

Sabent això, veiem ara què podem dir del següent circuit:



Veiem que és una combinació dels dos circuits anteriors. Veiem què passa per freqüències altes i baixes.

Si $\omega \to 0 \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} \to \infty$ (C es comporta com c.o) $\to$ Seria com l'inversor.

Si $\omega \to \infty \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} \to 0$ (C es comporta com c.c) $\to$ La sortida seria 0
$V_p = V_n = V_0 = 0$

Anem ara a veure ara què passa si les freqüències són molt altes (però no ∞) o molt baixes (però no 0)

Si $\omega\downarrow\downarrow \Rightarrow Z_R << Z_C = \frac{1}{j\omega C} \to Z_R // Z_C \approx \frac{Z_R \cdot Z_C}{Z_R + Z_C} \approx \frac{Z_R \cdot Z_C}{Z_C} \approx Z_R$

En aquest cas es comportaria com un inversor: $\underline{V_0} = -\frac{R_2}{R_1}\underline{V_i}$

Si $\omega\uparrow\uparrow \Rightarrow Z_R >> Z_C = \frac{1}{j\omega C} \to Z_R // Z_C \approx \frac{Z_R \cdot Z_C}{Z_R + Z_C} \approx \frac{Z_R \cdot Z_C}{Z_R} \approx Z_C$

En aquest cas es comportaria com un integrador: $\underline{V_0} = \frac{j}{\omega R_1 C}\underline{V_i}$

Anem ara a comparar els mòduls de les impedàncies dels dos elements que estan en paral·lel:

$|Z_R| = R_2$, $|Z_C| = \left|\frac{j}{WC}\right| = \frac{1}{WC}$

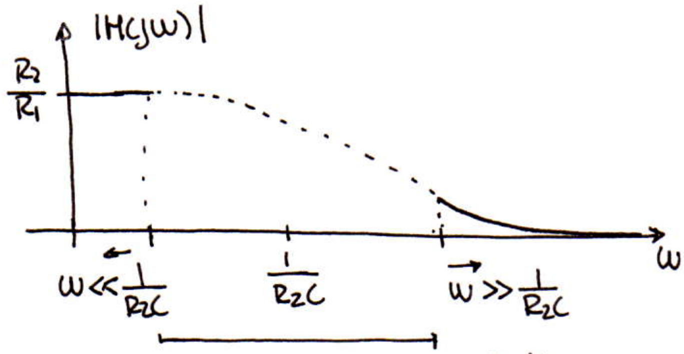
Si $R_2 >> \frac{1}{WC} \rightarrow w >> \frac{1}{R_2 C}$ es comportarà com un integrador

Si $R_2 << \frac{1}{WC} \rightarrow w << \frac{1}{R_2 C}$ es comportarà com un inversor.

Intentem mirar gràficament què li passa al mòdul de $H(jw)$

$w \uparrow\uparrow \quad H(jw) = \frac{j}{wR_1C} \rightarrow |H(jw)| = \frac{1}{wR_1C}$

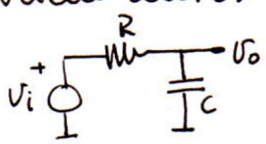
$w \downarrow\downarrow \quad H(jw) = -\frac{R_2}{R_1} \rightarrow |H(jw)| = \frac{R_2}{R_1}$



No hem calculat què passarà en el tram intermig, però podem esperar que sigui semblant a això, almenys començarà i acabarà així.

Podríem dir que és un filtre que deixa passar les freqüències baixes i les altes no.

Veurem altres casos:

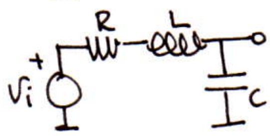


$Z_R = R$

$Z_C = \frac{1}{jWC}$

Si $W \rightarrow 0 \Rightarrow C$ és c.o. $\Rightarrow V_o = V_i$
Si $W \rightarrow \infty \Rightarrow C$ és c.c. $\Rightarrow V_o = 0$ } PAS-BAIX

Deixa passar les freqüències baixes.



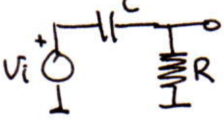
$Z_R = R$

$Z_L = jWL$

$Z_C = \frac{1}{jWC}$

Si $W \rightarrow 0 \Rightarrow$ L és c.c. i C és c.o $\Rightarrow V_o = V_i$
Si $W \rightarrow \infty \Rightarrow$ L és c.o no deixa passar
C és c.c. el poc que passa ho curtcircuita } PAS-BAIX

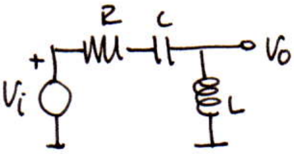
També és un filtre pas-baix, però és millor que l'anterior, ja que limita més el pas de les freqüències altes.



$Z_R = R$

$Z_C = \frac{1}{jWC}$

Si $W \rightarrow 0 \Rightarrow$ C és c.o $\Rightarrow$ no deixa passar
Si $W \rightarrow \infty \Rightarrow$ C és c.c. $\Rightarrow V_o = V_i$ } PAS-ALT



$Z_R = R$

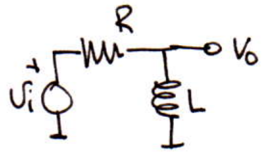
$Z_L = jWL$

$Z_C = \frac{1}{jWC}$

Si $W \rightarrow 0 \Rightarrow$ C és c.o $\Rightarrow$ no deixa passar senyal
L és c.c. $\Rightarrow$ el poc que passa L el curtcircuita
Si $W \rightarrow \infty \Rightarrow$ C és c.c. $\Rightarrow$ deixa passar
L és c.o $\Rightarrow V_o = V_i$ } PAS-ALT

També és un filtre PAS-alt, però és millor que l'anterior ja que limita més el pas de les freqüències baixes.

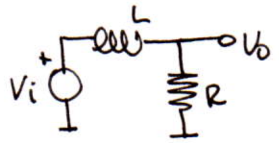
També podríem fer filtres amb bobines



$Z_R = R$ Si $\omega \to 0 \Rightarrow L$ és c.c $\Rightarrow V_o = 0$

$Z_L = j\omega L$ Si $\omega \to \infty \Rightarrow L$ és c.o $\Rightarrow V_o = V_i$

} PAS-ALT



$Z_R = R$ Si $\omega \to 0 \Rightarrow L$ és c.c. $\Rightarrow V_o = V_i$

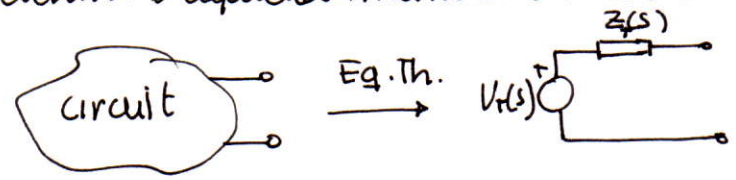
$Z_L = j\omega L$ Si $\omega \to \infty \Rightarrow L$ és c.o $\Rightarrow V_o = 0$ no passa

} PAS-BAIX

Si podem fer el mateix amb condensadors que amb bobines, escollirem condensadors, ja que són més petits, més ideals, més barats, més fàcils de fer i, a més, es poden integrar.

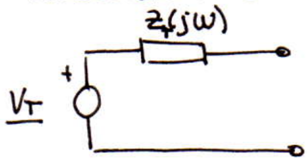
4.6. CIRCUIT EQUIVALENT A UNA FREQÜÈNCIA

Donat qualsevol circuit, sempre podem trobar el seu equivalent Thevenin. D'aquesta manera tindríem:



$Z(s)$ pot tenir diversos termes en s: $s^3, s^2, s, \ldots$

Si treballem en Règim Permanent Sinusoïdal tindrem:



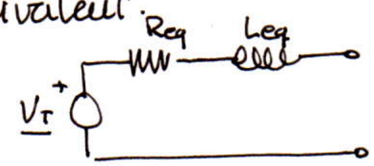
$Z(j\omega) = R_T + jX_T$ (hem vist que la impedància serà així).

Recordem com eren les impedàncies dels elements:

$Z_R = R$, $Z_L = j\omega L$, $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$

Per simplificar aquest equivalent Thevenin, podem dir que:

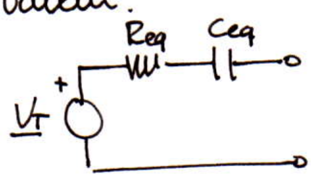
- Si tenim $X_T > 0$, podem dir que la impedància de Thevenin està formada per una Resistència equivalent i una bobina equivalent.



on $R_{eq} = R_T$

$L_{eq} \Rightarrow jX_T = j\omega \cdot L_{eq} \Rightarrow L_{eq} = \frac{X_T}{\omega}$

- Si tenim $X_T < 0$, podem dir que la impedància de Thevenin està formada per una Resistència equivalent i un condensador equivalent.



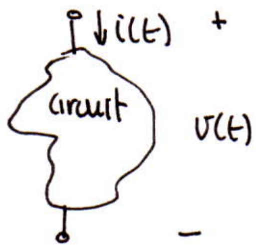
on $R_{eq} = R_T$

$C_{eq} \Rightarrow jX_T = \frac{j}{\omega C_{eq}} \Rightarrow C_{eq} = \frac{1}{\omega X_T}$

Tot això ho podrem fer així només si estem en RPS i treballem a una freqüència concreta.

4.7. POTÈNCIA EN RÈGIM PERMANENT SINUSOÏDAL

Anem a estudiar com és la potència en règim permanent sinusoidal. Donat un circuit serà:



$P(t) = v(t) \cdot i(t)$
↓
Potència instantània

Ja sabem que en R.P.S., per una determinada ω, tots els senyals seran sinusoïdals. Així doncs tindrem:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

Amb això, la potència serà:

$$P(t) = V_m \cdot I_m \cdot \cos(\omega t + \theta_v) \cdot \cos(\omega t + \theta_i)$$

Sabent que:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

podrem escriure:

$$P(t) = \frac{V_m \cdot I_m}{2}\cos(\omega t + \theta_v + \omega t + \theta_i) + \frac{V_m \cdot I_m}{2}\cos(\omega t + \theta_v - \omega t - \theta_i)$$

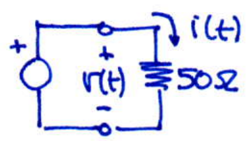
$$P(t) = \underbrace{\frac{V_m \cdot I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)}_{ct.} + \underbrace{\frac{V_m \cdot I_m}{2}\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}_{\text{variable i de freqüència doble}}$$

Veiem doncs que ens queda una part que és constant, i una altre que té freqüència doble.

EXEMPLE:

Trobar la potència absorbida per la càrrega

$320 \cos 100\pi t$
↓
50HZ



$v(t) = 320 \cos(100\pi t + 0°)$

$i(t) = \frac{320}{50}\cos(100\pi t + 0°)$

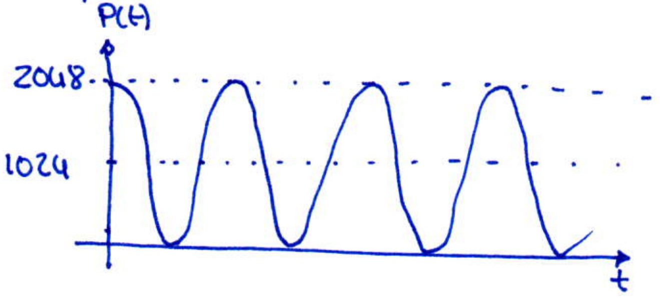
Podríem calcular els fasors, però en aquest cas és molt senzill i no caldria:

$$P(t) = \frac{320^2}{2 \cdot 50} \cdot \cos(0° - 0°) + \frac{320^2}{2 \cdot 50} \cdot \cos(200\pi t + 0° + 0°)$$

$$P(t) = 1024 + 1024 \cdot \cos(\underbrace{200\pi t}_{\downarrow\ 100\,HZ})$$

freqüència doble que el senyal origen

Gràficament tindríem:



Veiem que tenim una potència mitja.
Podria ser el cas d'una estufa connectada a la xarxa elèctrica.

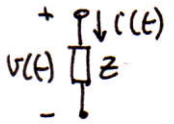
Un cop vist l'exemple, busquem de manera genèrica quin seria el valor mig de la potència:

$$\boxed{P = \overline{p(t)} = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cos\phi}$$ Potència mitja on $\phi = \theta_v - \theta_I$

Fins aquí hem anat parlant en general de la potència. Això s'ha de tenir clar com a punt de partida i serveix sempre. Ara podem particularitzar per algun cas concret.

Cas d'una impedància:

Suposem que tenim una impedància, on coneixem $i(t)$.



$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$

Podrem calcular la tensió i ho haurem de fer amb fasors per anar bé.

El fasor de $i(t)$ seria:

$\underline{I} = I_m e^{j\theta_i}$

Z serà un nombre complexe que multiplicarem per $\underline{I}$ per trobar la tensió.

$\underline{V} = Z \cdot \underline{I} \rightarrow \underline{V} = I_m \cdot |Z| e^{j(\theta_i + \arg Z)}$

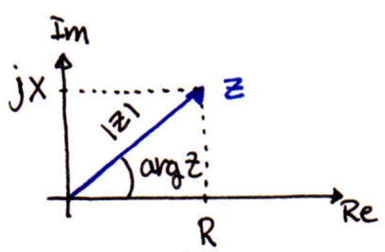
Si posem el senyal en el temps tindrem:

$v(t) = I_m |Z| \cdot \cos(\omega t + \theta_i + \arg Z)$

Segons el que hem dit abans, la potència mitja absorbida per aquesta càrrega serà:

$P = \frac{I_m^2 \cdot |Z|}{2} \cdot \cos(\arg Z)$

Si $Z = R + jX$



També: $|Z| \cdot \cos(\arg Z) = \mathrm{Re}[Z] = R$

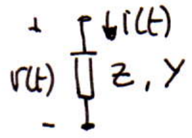
En aquest cas:

$$\boxed{P = \frac{I_m^2 \cdot R}{2}}$$

Veiem que la potència mitja només es veu afectada per la part real de la impedància (R). Si tinguéssim un C o L sols, $Z = jX$ i aquesta càrrega no absorviria potència mitja.

El C o L el què fan és emmagatzemar potència, que després podran donar. Altres elements quan absorveixen potència que radien. Per exemple, una estufa ho faria en forma de calor i una antena en forma d'ones.

Suposem que ara tenim també la impedància, però en coneixem la tensió $v(t)$ i no la I.



$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$

No ho hem demostrat, però podríem agafar ara Y(s) com una H(s) i arribaríem a la conclusió que igualment treballem amb fasors.

$\underline{V} = V_m e^{j\theta_v} \rightarrow \underline{I} = Y \cdot \underline{V} \rightarrow \underline{I} = V_m |Y| \cdot e^{j(\theta_v + \arg Y)} \rightarrow i(t) = V_m |Y| \cos(\omega t + \theta_v + \arg Y)$

Si ho volem demostrar:

$$A\cos(\omega t + \theta) \longrightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow A\,|H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \theta + \arg H(j\omega))$$

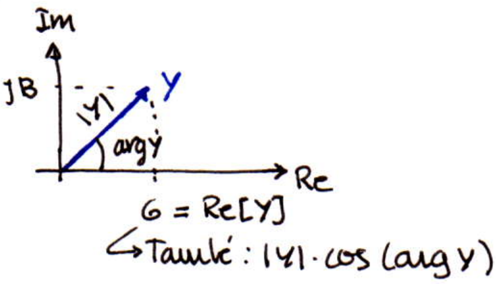
$A \rightarrow A \cdot |H(j\omega)|$
$\theta \rightarrow \theta + \arg H(j\omega)$
$\omega \rightarrow \omega$

Si $H(s) = Y(s)$ tindrem:

$i(t) = V_m \cdot |Y(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \theta_v + \arg Y(j\omega))$

Amb això, la potència mitja seria:

$$P = \frac{V_m^2 \cdot |Y|}{2} \cdot \cos(\arg Y)$$



Així, igual que abans:

$$\boxed{P = \frac{V_m^2 \cdot G}{2}}$$

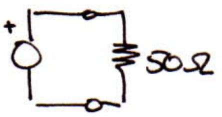
Recordem però que:

$$G = Re[Y] = Re\left[\frac{1}{Z}\right] \neq \frac{1}{Re[Z]} = \frac{1}{R}$$

4.7.1. VALOR EFICAÇ

Per entendre millor el valor eficaç, vegem-ho a partir d'un exemple. Reprenem l'exercici de la placa calefactora o estufa.

Recordem que:

$320 \cos 100\pi t$ 

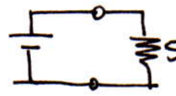
Recordem que la potència mitja era:

$$P = \frac{320^2}{2 \cdot 50} = 1024\ W$$

Trobaríem algun generador constant (pila, per exemple) que connectat a aquest circuit dissipés la mateixa potència mitja? Doncs sí, i seria el valor eficaç.

Definiríem valor eficaç com el valor que hauria de tenir una tensió o intensitat contínua per dissipar la mateixa potència mitjana que el senyal sinusoïdal.

Així, per aquest mateix cas podríem dir:

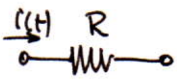
V_{ef} 

$$\rightarrow \frac{V_{ef}^2}{50}\ W = 1024 = \frac{320^2}{2 \cdot 50} \Rightarrow V_{ef}^2 = \frac{320^2}{2} \Rightarrow V_{ef} = \frac{320}{\sqrt{2}} = 226\ V$$

Veiem doncs que una tensió constant de 226V, escalfaria igual que una tensió sinusoïdal de 50Hz i 320V d'amplitud.

Podríem dir també que el valor eficaç és el valor constant que produiria la mateixa absorció de potència mitja que el valor sinusoïdal d'origen.

Hem vist fins ara que, en general, només cal que considerem les resistències C i L no absorveixen potència. En aquest cas:

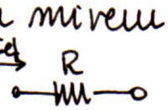


$$P(t) = R \cdot i^2(t)$$

pot. mitja $P = R \cdot \overline{i^2(t)} = R\left[\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} i^2(t)\,dt\right]$

si el senyal és periòdic, seria això, sinó seria $\int_0^\infty$

Ara mirem quina seria la intensitat eficaç:



$p(t) = v(t) \cdot i(t) = (R \cdot I_{ef}) \cdot I_{ef} = R \cdot I_{ef}^2$ Potència instantània

La potència mitja, en aquest cas, seria la mateixa.

Per tant, igualant les dues, tindrem que:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} i^2(t)\,dt}$$

Valor eficaç de la $i(t)$ (general, per qualsevol cas)

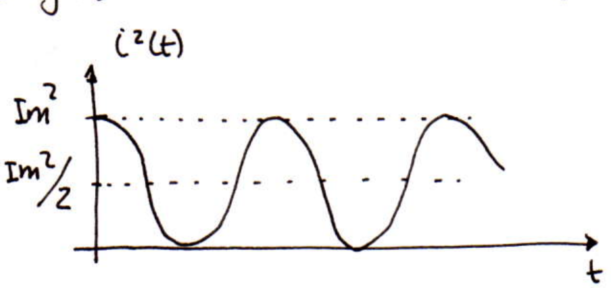
En anglès se li diu r.m.s (root mean square)

Si estem parlant de senyals sinusoïdals tindrem:

$$i(t) = I_m \cdot \cos wt$$

$$I_{ef}^2 = \frac{I_m^2}{2}$$

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0'707 \cdot I_m$$



Amb l'exemple que hem vist, 220-230V que tenim a casa seria la tensió eficaç.

En el cas que tinguéssim un senyal quadrat seria:

En aquest cas, el valor eficaç seria Im.
Com que ara estem treballant en R.P.S, utilitzarem cosinus.
Si treballem amb valors eficaços tindrem:

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad i \quad V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

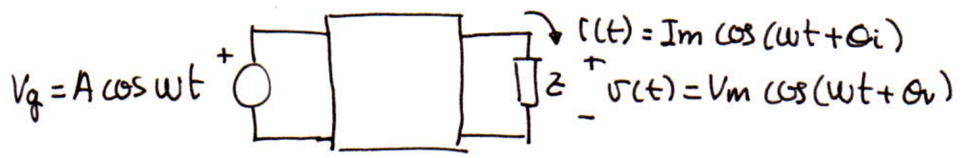
Si treballem amb valors eficaços, podrem escriure la potència mitja com:

$$\boxed{P = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos\phi} \rightarrow \boxed{P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos\phi}$$

Ho podrem calcular de les dues maneres, serà igual.
Si tenim una resistència tindrem:

$$\boxed{P = \frac{V_{ef}^2}{R} = I_{ef}^2 \cdot R}$$

Moltes vegades, donat un circuit, ens interessa principalment trobar la potència. Per exemple, en una xarxa Wifi, perquè funcioni, s'han de fer els enviaments a una certa potència. Per tant necessitarem unes certes amplituds.
Si tenim un cas com el següent:



La potència mitja seria: $P = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos(\theta_v - \theta_i)$

Com a manera alternativa, també ho podríem buscar amb fasors:

$$\underline{V_g} = A \cdot e^{j0^\circ} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{V} = V_m \cdot e^{j\theta_v} \\ \underline{I} = I_m e^{j\theta_i} \end{array}\right\} P = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

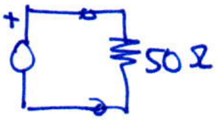
També ho podríem trobar amb els valors eficaços:

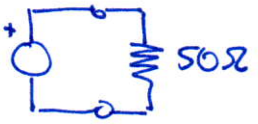
$$\underline{V_{gef}} = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{V_{ef}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\theta_v} \\ \underline{I_{ef}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\theta_i} \end{array}\right\} P = |V_{ef}| \cdot |I_{ef}| \cdot \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Mirem-ho amb l'exemple que teníem, a veure si ens dóna el mateix:

EXEMPLE:

Calculem la potència mitja utilitzant els valors eficaços.

$320 \cdot \cos 100\pi t$ 

$V_{ef} = \frac{320}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0°}$ 

Si l'entrada és una tensió eficaç, la resta de tensions també ho seran.

$$P = \frac{V_{ef}^2}{50} = \frac{\left(\frac{320}{\sqrt{2}}\right)^2}{50} = 1024$$

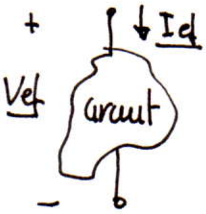
Veiem que ho hem fet diferent però ens dóna igual que abans.

Ara hem treballat amb valors eficaços, i tenim $V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos\phi$, sense dividir per 2, com abans, que teníem $\frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos\phi$.

4.7.2. POTÈNCIA COMPLEXA

La potència complexa la definirem de manera diferent a la potència instantània que hem calculat abans. N'hi direm S, i serà la tensió eficaç per la intensitat eficaç conjugada. Ara, ho farem tot amb fasors.

Suposem un circuit genèric, i trobem aquesta potència:



$S = \underline{V_{ef}} \cdot \underline{I_{ef}}^*$

Recordem que en RPS, $V_{ef} = V_m/\sqrt{2}$ i $I_{ef} = I_m/\sqrt{2}$, aleshores:

$$S = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{V_m \cdot e^{j\theta_v}}_{\underline{V}}}_{\underline{V_{ef}}} \cdot \Big[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{I_m \cdot e^{j\theta_i}}_{\underline{I}}}_{\underline{I_{ef}}}\Big]^* = \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cdot e^{j\theta_v} \cdot e^{-j\theta_i}$$

$V = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$

$I = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$

$$S = \frac{V_m \cdot I_m}{2} e^{j(\theta_v - \theta_i)} = V_{ef} \cdot I_{ef}\, e^{j(\theta_v - \theta_i)}$$

a vegades convé treballar amb els valors eficaços.

Tenint en compte que: $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ podem escriure:

$$S = \underbrace{\frac{V_m \cdot I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i)}_{P} + j \underbrace{\frac{V_m \cdot I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i)}_{Q}$$

P: És la potència mitja que hem trobat abans. També se'n diu potència activa i es mesura en [W] (Watts)

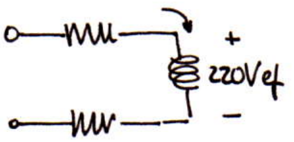
Q: És la potència reactiva i es mesura en [VAR] (Volts Ampers Reactius). (Això surt sobre el paper, a la realitat no compta).

S: És la potència complexa.

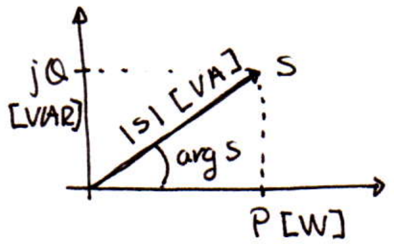
|S|: Del mòdul de la potència complexa se'n diu potència aparent i es mesura en [VA] Volt Ampers.

Es diu així perquè mirant el mòdul, aquest pot tenir un valor, i pot semblar que hi hagi una potència, però quan mirem la fase, ens podem adonar que la potència activa (que és la que compta a la realitat). és 0. N'hi hauria només de reactiva, i aquesta no fa res.

Si nosaltres tinguéssim això:



A nosaltres ens interessarà posar un C en paral·lel per tal que cancel·li la L i no tinguem potència reactiva, ja que no l'aprofitem i la companyia elèctrica ens la cobraria, perquè va passant un corrent i desgasta les seves línies. Voldríem tenir només R.



De fet interessarà sempre que arg S sigui petit, jà que Q no fa res, però ens la cobren.

4.7.3. POTÈNCIA EN dBm

Degut a què sovint ens apareixeran potències amb ordres de magnitud molt diversos, ens anirà millor mesurar la potència en escala logarítmica, enlloc de amb escala lineal. Ho farem de la següent manera:

$$P(dBm) = 10 \log \left[\frac{P(mW)}{1mW} \right]$$

De fet les escales logarítmiques s'utilitzen molt: per terratrèmols (escala de Richter), per accidents nuclears,... Fins i tot la nostra orella també s'assembla a una escala logarítmica.

Vegem uns quants valors:

$P = 1mW \rightarrow P(dBm) = 0\,dBm$

$P = 100\,mW \rightarrow P(dBm) = 20\,dBm$ $(\log 10^2 = 2)$

$P = 1W \rightarrow P(dBm) = 30\,dBm$ $(\log 10^3 = 3)$

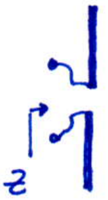
$P = 100\mu W \rightarrow P(dBm) = -10\,dBm$ $(\log 10^{-1} = -1)$

$P = 1\mu W \rightarrow P(dBm) = -30\,dBm$ $(\log 10^{-3} = -3)$

En comunicacions treballem amb un ventall de potències que van de −120 dBm a 60 dB. Això seria una diferència de 18 ordres de magnitud en escala lineal.

EXEMPLE:

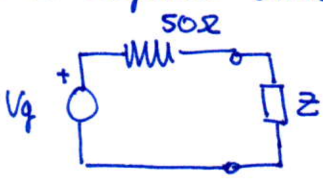
Suposem una antena Wifi que presenta una impedància d'entrada de $75+j45\ \Omega$ a la freqüència de $2'45\,GHz$



Serà un dipol amb dos fils per a la seva connexió, que converteix energia elèctrica en energia electromagnètica. (ones).

Com que la impedància té una j i parlem d'una freqüència concreta, vol dir que estem treballant en R.P.S.

Volem saber quina potència absorveix aquest dipol quan el posem en el següent circuit.



$v_g = 6'3\cos wt$ on $w = 2\pi\cdot 2'45\cdot 10^9$

Recordem que per trobar la potència mitja, només afecta la part real, no la part imaginària.

Podem dir que la part imaginària no compta pel càlcul de la potència mitja, però sí que la necessitem per la intensitat que farem servir per trobar la potència.

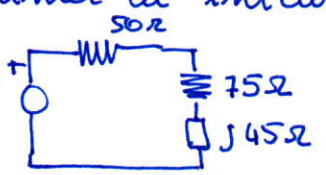
Tal com hem vist a la teoria, la potència la podrem calcular de diverses maneres, però sol anar bé utilitzar els valors eficaços.

$$A_{ef} = \frac{6'3}{\sqrt{2}} = 4'45$$

Amb això, ho calcularem de 3 maneres diferents:

→ Calculem primer la intensitat:

$\underline{V_{ef}} = 4'45\, e^{j0^\circ}$



$$\underline{I_{ef}} = \frac{\underline{V_{ef}}}{50+75+j45} = \frac{4'45\, e^{j0^\circ}}{125+j45} =$$

$$= 0'031516 - j0'011346 = 0'0335\cdot e^{-j19'8^\circ}$$

Com que hem de calcular la potència sobre la resistència de 75Ω (ja hem dit que la de la part imaginària no compta):

$$P = |I_{ef}|^2\cdot R = 0'0335^2\cdot 75 = 0'08415 \approx 84\,mW$$

En escala logarítmica tindríem:

$$P(dBm) = 10\log 84 = 19'24\,dBm$$

→ Ho podem calcular també buscant primer la tensió al dipol:

$$\underline{V_L}_{ef} = \frac{75+j45}{50+75+j45}\cdot \underline{V_{ef}} = (0'64+j\,0'127)\cdot\underline{V_{ef}} = 0'66\cdot e^{j11'2}\cdot 4'45\cdot e^{j0^\circ} = 2'93\cdot e^{j11'2^\circ}$$

Ara podem buscar la potència:

$$P = |V_{Lef}|^2\cdot G$$

Recordem que G no és la inversa de R. Cal buscar la inversa de Z i agafar la part real.

$$G = Re\{Y\} = Re\left\{\frac{1}{Z}\right\} = Re\left\{\frac{1}{75+j45}\right\} = Re\left\{9'8\cdot10^{-3} - j\,5'9\cdot10^{-3}\right\} = 9'8\cdot10^{-3} \quad *$$

Aleshores:

$$P = |V_{ef}|^2 \cdot 9'8\cdot10^{-3} = 2'93^2 \cdot 9'8\cdot10^{-3} = 0'084166 \approx 84\,mW$$

Que veiem que dóna el mateix.

→ Encara ho podem calcular d'una altra manera; calculant la potència complexa.

$$S = V_{Lef}\cdot I_{ef}^* = 2'93\cdot e^{j11'2°}\cdot\left[0'0335\cdot e^{-j19'8°}\right]^* =$$

$$= 2'93\cdot e^{j11'2°}\cdot 0'0335\cdot e^{j19'8°} = 0'098\cdot e^{j31°} =$$

$$= 0'098\cdot\cos 31° + j\,0'098\sin 31° = 0'084 + j\,0'0505$$

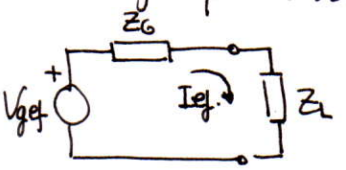
La potència mitja és la part real de S:

$$P = Re[S] = 0'084 = 84\,mW$$

Veiem que novament tenim el mateix.

4.7.4. MÀXIMA TRANSFERÈNCIA DE POTÈNCIA

Suposem que tenim un generador que té una impedància interna fixa. Donat aquest generador, voldrem saber quina és la càrrega que absorveix màxima potència.



Suposem el cas general que:

$Z_G = R_G + jX_G$

$Z_L = R_L + jX_L$

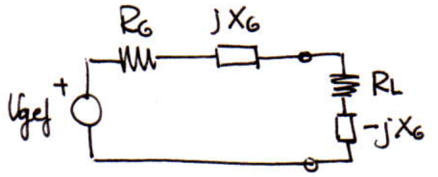
Busquem la potència mitja a la càrrega, sabent que només la part real n'absorbeix. Així tindrem (no fem tot amb valors eficaços):

$$P_L = |I_{ef}|^2\cdot R_L = \left|\frac{V_{gef}}{R_G + jX_G + R_L + jX_L}\right|^2\cdot R_L$$

$$P_L = \frac{|V_{gef}|^2\cdot R_L}{(R_G+R_L)^2 + (X_G+X_L)^2}$$

De moment sabem que R_G i X_G no es poden modificar, però sí que podem actuar sobre la càrrega. Per tal que P_L sigui màxim, de moment podem fer $X_G + X_L = 0$. Ho podem aconseguir, ja que sabem que els condensadors són reactàncies negatives.

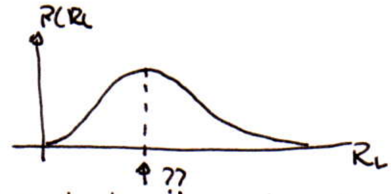
Per tant, si de moment fem $X_L = -X_G$, tindrem:



En aquest cas, l'expressió de la potència quedarà:

$$P_L = \frac{R_L}{(R_G+R_L)^2} |V_{gef}|^2$$

Si $R_L \to 0$, $P_L \to 0$
Si $R_L \to \infty$, $P_L \to 0$
} Això vol dir que hi haurà un màxim en algun punt.



Si volem trobar la potència màxima, caldrà trobar aquest valor de R_L que ho fa. Per trobar-lo, fem la derivada i igualem a 0. Derivem respecte R_L:

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \rightarrow \frac{1\cdot(R_G+R_L)^2 - R_L\cdot 2(R_G+R_L)}{(R_G+R_L)^4} = 0$$

Haurà de ser 0 el numerador.

$$R_G^2 + \cancel{2R_G R_L} + R_L^2 - \cancel{2R_G R_L} - 2R_L^2 = R_G^2 - R_L^2 = 0 \rightarrow R_L^2 = R_G^2 \Rightarrow \boxed{R_L = R_G}$$

Per tant veiem que tenim dues condicions per tal de trobar la potència màxima:

$$\left.\begin{array}{l} R_L = R_G \\ X_L = -X_G \end{array}\right. \Rightarrow Z_L = Z_G^*$$

Tindrem màxima transferència de potència si la impedància de càrrega és la conjugada de la de la font.

D'això se'n diu ADAPTACIÓ CONJUGADA que amb anglès es diu "CONJUGATE MATCHING".

Quan estiguem en situació d'adaptació, la potència que arribarà a la càrrega (i serà màxima) serà:

$$\boxed{P_{Lmax} = \frac{|V_{gef}|^2}{4R_G}}$$

Potència màxima que pot absorvir la càrrega.

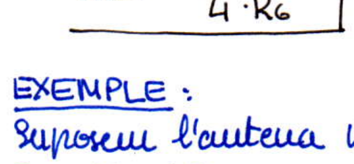
Això vol dir que el generador no pot donar més potència. Per tant direm doncs que la potència disponible al generador és:

$$\boxed{P_{AVS} = \frac{|V_{gef}|^2}{4\cdot R_G}}$$

Potència disponible al generador
AVS → AVailable from Source

EXEMPLE:

Suposem l'antena Wifi d'un exercici anterior, que tenia una impedància $Z_A = 75 + j45$



No és la millor antena que podríem posar, ja que no té la impedància conjugada a la del generador. Seria ideal tenir $Z_A = 50\Omega$.

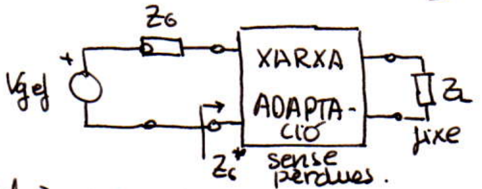
La potència disponible a la font serà:

$$P_{AVS} = \frac{|V_{gef}|^2}{4\cdot R_G} = \frac{4'45^2}{4\cdot 50} \approx 100\,mW.$$

En l'exercici anterior, la potència a la càrrega era $\approx 84\,mW$, per tant no arriba la màxima potència a la càrrega.

4.7.5. ADAPTACIÓ D'IMPEDÀNCIES

Tal com hem vist en l'exemple anterior, no estem en situació d'adaptació. Si en un cas com aquest, on no podem tenir la càrrega que vulguem, ens interessa que tinguem a la càrrega potència màxima, haurem de posar entremig una xarxa d'adaptació per aconseguir-ho.



Haurem de posar un circuit a la capsa que compleixi que tot plegat, capsa + càrrega, tingui una impedància Z_G^*

Caldrà procurar que en aquesta capsa no hi hagin resistències, ja que aquestes absorvirien potència i no ens interessa, ja que volem que arribi tota a la càrrega.

Per tant, al circuit d'adaptació, només hi podran haver bobines i condensadors, ni resistències ni elements actius.

El conjunt haurà d'absorvir màxima potència, però haurem de mirar que aquesta només vagi a la càrrega.

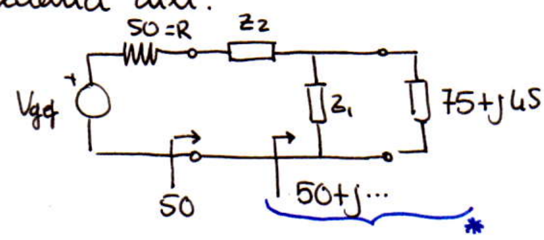
Veiem com podria ser la xarxa d'adaptació segons el cas $R_G < R_L$ o $R_G > R_L$.

• Cas $R_L > R_G$:

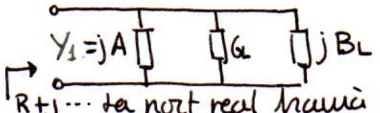
Partim de l'exemple de l'antena Wifi per saber si podrem aconseguir això i com:

Posarem primer una impedància en paral·lel amb la càrrega per disminuir la seva part real. Després posarem una altra impedància en sèrie per acabar d'arreglar la part imaginària.

Quedaria així:



* Per aquesta part treballem amb admitàncies en paral·lel.



Si no sabem Y_L, també podem fer $Z_1 // Z_L$

R+j... la part real haurà de ser R del generador.

Per posar-ho en aquesta forma, busquem l'admitància i ho posem en la seva forma paral·lel.

$$Z_{in} = \frac{1}{G + jB_L + jA} = \frac{G_L - j(B_L + A)}{G_L^2 + (B_L + A)^2}$$

La part real voldrem que sigui la resistència del generador.

$$\frac{G_L}{G_L^2 + (B_L + A)^2} = R_G \rightarrow G_L = R_G\left(G_L^2 + B_L^2 + A^2 + 2B_LA\right) \Rightarrow R_GA^2 + 2R_GB_LA + R_GB_L^2 + R_GG_L^2 - G_L = 0$$

Haurem de resoldre l'equació de 2on grau i trobar la A que fa que això es compleixi:

$$A = \frac{-2R_GB_L \pm \sqrt{4R_G^2B_L^2 - 4R_G\left(R_GB_L^2 + R_GG_L^2 - G_L\right)}}{2R_G}$$

Recordem de l'exercici que: $Y_L = \underset{\downarrow\atop G_L}{0'0098} - j\underset{\downarrow\atop B_L}{0'00588}$

Fem ara els càlculs pel cas d'aquesta antena agafant:

$R_G = 50$ i $Y_L = 0'0098 - j\,0'00588 = G_L + jB_L$

Amb això, les arrels del polinomi són:

$$A = \begin{cases} 0'01588 \\ -0'004116 \end{cases}$$

Recordem l'expressió de Z_{in}:

$$Z_{IN} = \underbrace{\frac{G_L}{G_L^2 + (B_L+A)^2}}_{\text{ja hem imposat que fos } R_G = 50} - j\frac{B_L+A}{G_L^2+(B_L+A)^2}$$ → Donat ja el valor de A, podem trobar quant val aquesta part.

També ho podem fer buscant directament la inversa de la admitància.

$$Z_{IN} = \frac{1}{G_L + jB_L + jA}$$

Per qualsevol dels dos valors de les arrels (valors de A) trobem que:

$Z_{IN} = 50 - j51 \quad (A = 0'01588)$

$Z_{IN} = 50 + j51 \quad (A = -0'004116)$

A partir d'aquí, faltaria calcular la impedància Z_2 per tal que s'acabés cancelant la part imaginaria de l'anterior Z_{IN}.

- Pel cas $50 - j51$, vol dir que haurem d'afegir en sèrie una bobina amb impedància $j51$.
  L'element que hem posat en paral·lel, té $B = j\,0'01588$. Fem la inversa per saber la seva impedància

$$\frac{1}{j\,0'01588} = -j63 \rightarrow \text{Serà un } C \text{ de valor } Z_C = -j63 = -\frac{j}{\omega C}$$

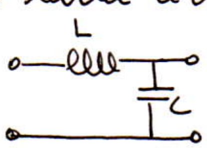
També ho podem buscar directament de la admitància. Recordem que $f = 2'45$ GHz.

$$Y_C = j\omega C = j\,0'01588 \Rightarrow C = \frac{0'01588}{2\cdot\pi\cdot 2'45\cdot 10^9} \Rightarrow C \simeq 1pF$$

Per la bobina que posem a Z_2 tindrem:

$$Z_L = j51 = j\omega L \Rightarrow L = \frac{51}{2\pi\cdot 2'45\cdot 10^9} \Rightarrow L \simeq 3'3nH$$

Així la xarxa d'adaptació quedaria per aquest cas concret:



Amb: $C = 1pF$
$L = 3'3nH$

- Si estudiem ara l'altre cas: $50 + j51$, veiem que haurem d'afegir en sèrie un condensador amb impedància $-j51$.
  L'element que hem posat en paral·lel té $B = -j\,0'004116$. Fem la inversa per saber quina serà la impedància:

$$\frac{1}{-j\,0'004116} = j243 \rightarrow$$ Seria doncs una bobina de valor $z_L = j243 = j\omega L$

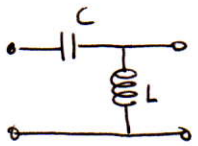
Si $f = 2'45\,GHz$ tindrem:

$$z_L = j\omega L = j243 \Rightarrow L = \frac{243}{2\pi \cdot 2'45 \cdot 10^9} \Rightarrow L \simeq 15'8\,nH$$

Per trobar el condensador que posarem a Z_2 farem:

$$z_C = \frac{-j}{\omega C} = -j51 \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi \cdot 2'45 \cdot 10^9 \cdot 51} \Rightarrow C \simeq 1'27\,pF$$

Així, la xarxa d'adaptació quedaria:



Amb: $C = 1'27\,pF$
$L = 15'8\,nH$

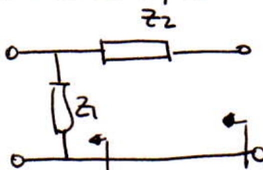
Com que podríem escollir l'opció que volguéssim, potser seria millor escollir la primera, que els valors dels components són més normals.

Aquest procés el podrem aplicar sempre que la part real de la càrrega sigui més gran que R_G.

• Cas $R_L < R_G$:

Si tenim aquest cas en què la càrrega és més petita, haurem de fer el procés simètric. En general, haurem d'imposar que la càrrega vegi el seu conjugat. Per aconseguir això, posarem primer una z_1 en paral·lel amb el generador per disminuir la part real, i desprès afegirem una impedància en sèrie amb la càrrega, per tal que ajusti la part imaginària.

La xarxa d'adaptació tindrà ara la següent forma:



← El fet que Z_2 estigui en sèrie amb la càrrega, li farà créixer la part real.

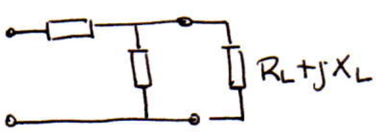
ajusta la part imaginària per tal que sigui el conjugat de la càrrega.

rebaixa la part real

Amb una xarxa d'adaptació, ho mirem per on ho mirem, sempre veurem el conjugat.

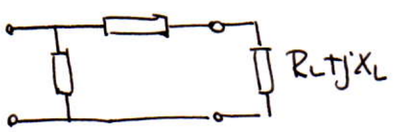
En resum podem dir que:

$R_L > R_G \rightarrow$



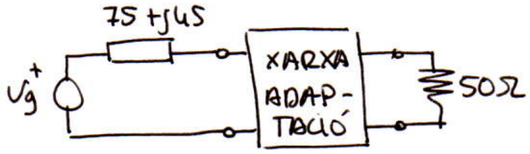
Posem alguna cosa en paral·lel a la càrrega per fer-la petita

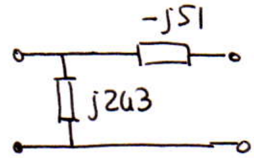
$R_L < R_G \rightarrow$



Posem alguna cosa en sèrie a la càrrega per tal de fer-la gran.

Si tinguéssim, per exemple el cas invers al que hem estudiat:

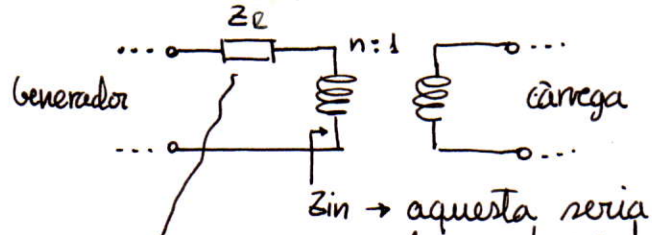




Obtindríem just això perquè és totalment simètric al cas estudiat.

Aquesta seria una de les maneres de fer una xarxa d'adaptació, però n'hi ha més, per exemple utilitzant un transformador ideal (com el que vam estudiar al tema de biports). És pot fer sobre el paper, però a la realitat haurem de veure com ho fem, perquè a la botiga no en venen d'ideals.

La xarxa d'adaptació seria:



Recordatori transformador ideal explicat a biports:

$v_1 = n v_2$

$-i_2 = n \cdot i_1$

$R_{in} = n^2 R_L$

Z_{in} → aquesta seria com la Z_1 d'abans, que arregla la part real.

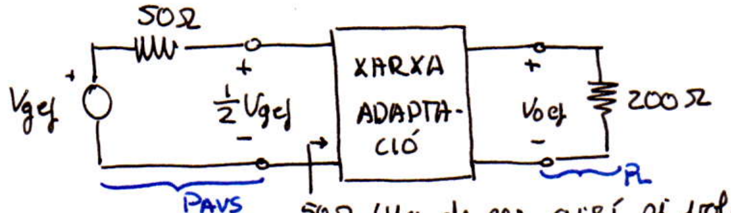
↳ Aquesta serà com la Z_2 d'abans, que arreglarà la part imaginària

Suposant que $Z_L = 12'5 + j12'5$ i $Z_0 = R_G = 50\Omega$, tindríem si $n=2$:

$$Z_{in} = n^2 \cdot Z_L = 4 \cdot (12'5 + j12'5) = 50 + j50$$

Ja tenim la part real bé, ara hauríem de cancel·lar la part imaginària amb $Z_2 = -j50$ i ja tindríem la xarxa d'adaptació.

Suposem el següent cas, i adonem-nos d'algunes coses que passen amb les xarxes d'adaptació.



En situació d'adaptació voldrem que la potència disponible a la font passi totalment a la càrrega.

50Ω (Ha de ser així si volem màxima transferència de potència).

Així doncs voldrem que $P_L = P_{AVS}$. Amb això, anem a calcular quina hauria de ser la tensió a la càrrega. Ho fem tot amb tensions eficaces.

$$\frac{|V_{oef}|^2}{R_L} = \frac{|V_{gef}|^2}{4 \cdot R_G} \rightarrow |V_{oef}|^2 = \frac{R_L}{4R_G} \cdot |V_{gef}|^2 \rightarrow |V_{oef}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_L}{R_G}} \cdot |V_{gef}|$$

Per $R_G = 50\Omega$ i $R_L = 200\Omega$ tindrem:

$$|V_{oef}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{200}{50}} \cdot |V_{gef}| \Rightarrow |V_{oef}| = |V_{gef}|$$

Això serà vàlid per qualsevol xarxa d'adaptació.

Veiem que la tensió a la càrrega hauria de ser igual a la del generador, però que seria superior a la de l'entrada de la xarxa d'adaptació, que és la meitat que la del generador.

No podrem aconseguir mai que la potència a la sortida sigui més gran que la de l'entrada (disponible a la font), com a màxim serà igual, tal com hem demostrat, però sí que podria ser que la tensió sigui més gran.

El fet que la potència sigui màxima a la càrrega, voldrà dir que la tensió i la intensitat també són màximes. En el cas de l'exemple veiem que, segons el què sabem del transformador,

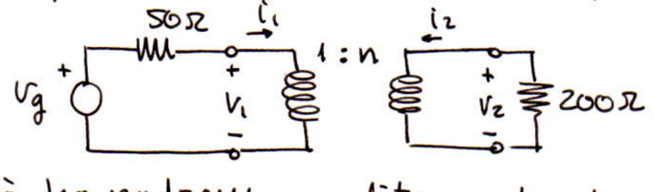
$$Z_{in} = n^2 \cdot Z_L \rightarrow 50 = n^2 \cdot 200 \Rightarrow n^2 = \frac{50}{200} \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

Una relació de transformació de 0'5:1, voldria dir que la bobina del secundari té el doble d'espires, i seria el mateix que dir que té una relació 1:2.

Ens pot semblar que augmentant la relació de transformació tindríem més tensió a la sortida i per tant més potència, però no seria així. Ales hores la impedància d'entrada seria molt més petita, i la tensió a l'entrada també, per tant amplificaríem una cosa molt petita i la sortida també seria petita.

Per tant estem veient que hi haurà una relació de transformació (n) concreta, que farà que la potència sigui màxima.

Tot i que ja hem vist quina hauria de ser la n per aquest cas, anem a fer tots els càlculs i trobem la potència en funció de n. De fet, seria el mateix que hem fet abans amb les impedàncies, però fet d'una altra manera per aquest cas del transformador.



Per aquest cas no cal posar la Z_2, ja que la càrrega és real.

Això ho podrem analitzar de diverses maneres:

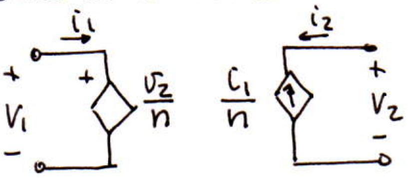
→ Sistemàticament:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{V_1 - V_g}{50} + i_1 = 0 \\ &\frac{V_2}{200} + i_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

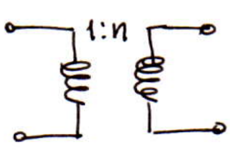
→ Busquem V_2 i després la potència a la càrrega. Haurem d'utilitzar la relació del transformador.

→ Circuit equivalent:

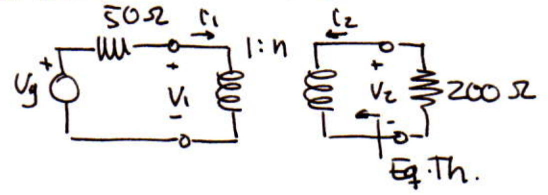
Posem el model del transformador i analitzem:



correspon a



→ Equivalent Thevenin:



En aquest cas R_{th}, coneixent les característiques del transformador serà:

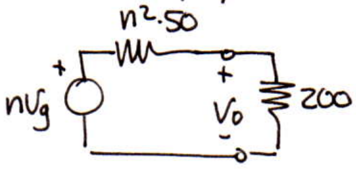
$R_{th} = n^2 \cdot 50$

(desconnectem fonts i busquem R a la sortida).

Busquem la V_{co}:

$$i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = -\frac{i_2}{n} = 0 \Rightarrow V_1 = V_g \Rightarrow V_2 = n V_1 = n V_g$$

Amb això, posaríem l'equivalent i trobaríem v_o:



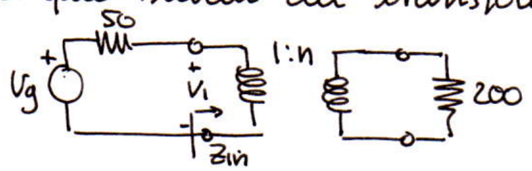
$$v_o = \frac{200}{n^2 \cdot 50 + 200} \cdot n \cdot v_g$$

→ Propietats del transformador ideal: (ho fem així)

Aprofitaríem el què sabem del transformador ideal:

$v_2 = n \cdot v_1$

$i_1 = -n i_2$



compte, ara tenim 1:n i no n:1 com abans.

$$v_1 = \frac{v_2}{n} \rightarrow Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{v_2/n}{-n \cdot i_2} = \frac{1}{n^2}\,\frac{v_2}{-i_2} = \frac{1}{n^2} \cdot R_L \Rightarrow R_{in} = \frac{200}{n^2}$$

Notem que ara surt al revés perque tenim 1:n.

Calculem ara v_1 (fent un divisor de tensió):

$$v_1 = \frac{R_{in}}{R_{in}+50} \cdot v_g = \frac{200/n^2}{200/n^2 + 50} \cdot v_g = \frac{200}{200 + 50n^2}\, v_g$$

$$v_2 = n \cdot v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{200\, n}{200 + 50n^2} \cdot v_g$$

Hauríem obtingut el mateix per qualsevol dels mètodes. Ara busquem la potència a la càrrega:

$$P = \frac{V_2^2}{R_L} = \frac{1}{200}\,\frac{200^2 n^2}{(200+50n^2)^2} \cdot v_g^2 = \frac{200\, n^2}{(200+50n^2)^2} \cdot v_g^2$$

Per saber el màxim, buscarem la derivada i la igualarem a zero. Només ens farà falta trobar el numerador de la derivada i igualar-lo a zero:

$$P = \frac{200 n^2}{2500 n^4 + 2 \cdot 10^4 n^2 + 4 \cdot 10^4}$$

$$(\text{num})P' = 400n\,(2500n^4 + 2\cdot 10^4 n^2 + 4\cdot 10^4) - 200n^2\,(10^4 n^3 + 4\cdot 10^4 n) = 0$$

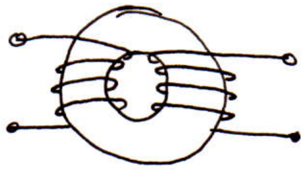
$$2\,(2500n^4 + 2\cdot 10^4 n^2 + 4\cdot 10^4) - n\,(10^4 n^3 + 4\cdot 10^4 n) = 0$$

$$5000n^4 + \cancel{4\cdot 10^4 n^2} + 8\cdot 10^4 - 10^4 n^4 - \cancel{4\cdot 10^4 n^2} = 0 \rightarrow -5000n^4 + 8\cdot 10^4 = 0$$

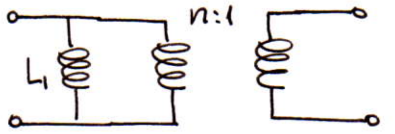
$$n^4 = \frac{80}{5} = 16 \Rightarrow \underline{n = 2}$$

Veiem doncs, que obtenim el mateix resultat que abans, quan ho vam calcular amb les impedàncies, n=2.

Amb tot això, cal tenir en compte una cosa. Com ja hem dit abans, a la botiga no venen transformadors ideals. Ens poden vendre això:



El seu model seria



El model del transformador real tindria una bobina addicional. Hauríem de tenir en compte això a l'hora de fer tots els càlculs.